Свойства расстояния и меры опровержимости на высказываниях экспертов как формулах многозначных логик

Викентьев А. А., Новиков Д. В.
vikent@math.nsc.ru
Новосибирск, Институт Математики СО РАН,
Новосибирский государственный университет

В настоящее время появляется все больший интерес к построению решающих функций на основе анализа экспертной информации, заданной в виде вероятностных логических высказываний нескольких экспертов. В данной работе предложено записывать высказывания экспертов в виде формул n-значной логики Лукасевича. В произвольном случае найдено правильное обобщение расстояния между такими формулами и меры опровержимости таких формул, что позволяет более тонко (по сравнению с двузначной логикой) решать прикладные задачи. В частности, значение истинности на модели может служить и субъективной вероятностью формулы. Ясно, что различные такие высказывания экспертов (и соответствующие им формулы) несут в себе разное количество информации, а, значит, возникает вопрос о ранжировании высказываний экспертов и сравнении их по информативности (далее — мере опровержимости при подтверждении высказывания). Для решения этих задач в работе будут введены и исследованы функция расстояния (см. [1]) между двумя такими формулами и мера опровержимости формул.

Определения основных понятий

Определение 1. *Множество элементарных высказываний $S^n(\varphi)$, используемых при написании формулы многозначной логики φ, назовем носителем формулы φ.*

Определение 2. *Назовем носителем совокупности знаний $S^n(\Sigma)$ объединение носителей формул, входящих во множество формул Σ, т. е. $S^n(\Sigma) = \bigcup_{\varphi\in\Sigma} S^n(\varphi)$.*

Определение 3. *Назовем множеством возможных значений носителя совокупности формул (знаний) с указанием всевозможных их значений истинности $Q_n(\Sigma) = \left\{\varphi_{\frac{k}{n-1}} \mid \varphi \in S^n(\Sigma),\ k = 0, \ldots, n-1\right\}$.*

Далее нас интересуют значения истинности, отличные от нуля, $k > 0$.

Определение 4. *Моделью M назовем любое подмножество $Q_n(\Sigma)$ такое, что M не содержит одновременно $\varphi_{\frac{k}{n-1}}$ и $\varphi_{\frac{l}{n-1}}$ при любых $k \neq l$ и $\varphi \in Q(\Sigma)$.*

Множество всех моделей будем обозначать $P^n(S(\Sigma))$.

Для упрощения записи верхний индекс в формулах, означающий n-значность логики, будем опускать.

Лемма 1. $|P(S(\Sigma))| = n^{|S(\Sigma)|}$.

Введем обозначение для множества моделей формулы с фиксированным для нее значением истинности:

$$\mathrm{Mod}_{S(\Sigma)}(A)_{\frac{k}{n-1}} = \Big\{ M \;\Big|\; M \in P(S(\Sigma)),\ M \models A_{\frac{k}{n-1}} \Big\}.$$

Определение 5. *Расстоянием между формулами φ и ψ, такими, что $S(\varphi) \cup S(\psi) \subseteq S(\Sigma)$, на множестве $P(S(\Sigma))$ назовем величину*

$$\rho_{S(\Sigma)}(\varphi, \psi) = \frac{\Big|\bigcup\limits_{k=1}^{n-1} \mathrm{Mod}_{S(\Sigma)}\big(\varphi_{\frac{k}{n-1}} \wedge \psi_0\big)\Big| + \Big|\bigcup\limits_{k=1}^{n-1} \mathrm{Mod}_{S(\Sigma)}\big(\varphi_0 \wedge \psi_{\frac{k}{n-1}}\big)\Big|}{n^{|S(\Sigma)|}}.$$

Свойства расстояний и меры опровержимости

Лемма 2. *Для любых формул φ, ψ, таких, что $S(\varphi) \cup S(\psi) \subseteq S(\Sigma)$ справедливы следующие утверждения:*

1) $0 \leqslant \rho_{S(\Sigma)}(\varphi, \psi) \leqslant 1$;
2) $\rho_{S(\Sigma)}(\varphi, \psi) = \rho_{S(\Sigma)}(\psi, \varphi)$;
3) $\rho_{S(\Sigma)}(\varphi, \psi) = 0 \Leftrightarrow \varphi \equiv \psi$;
4) $\rho_{S(\Sigma)}(\varphi, \psi) = 1 \Leftrightarrow \bigcup\limits_{l=1}^{n-1} \bigcup\limits_{k=1}^{n-1} \Big(\mathrm{Mod}(\varphi)_{\frac{k}{n-1}} \uplus \mathrm{Mod}(\psi)_{\frac{l}{n-1}} \Big) = P(S(\Sigma))$, *где* $\uplus$ *— прямое объединение;*
5) $\rho_{S(\Sigma)}(\varphi, \psi) \leqslant \rho_{S(\Sigma)}(\varphi, \chi) + \rho_{S(\Sigma)}(\chi, \psi)$;
6) *Если* $\varphi^1 \equiv \varphi^2$ *, то* $\rho_{S(\Sigma)}(\varphi^1, \psi) = \rho_{S(\Sigma)}(\varphi^2, \psi)$;

Лемма 3 (О расширении). *Для любого $S(\Sigma_0)$ такого, что $S(\varphi) \cup \cup S(\psi) \subseteq S(\Sigma_0)$ и любого $S(\Sigma_1)$ такого, что $S(\Sigma_0) \subseteq S(\Sigma_1)$, имеет место равенство:*

$$\rho_{S(\Sigma_0)}(\varphi, \psi) = \rho_{S(\Sigma_1)}(\varphi, \psi).$$

Лемма о расширении позволяет ограничить носители моделей при подсчете расстояний.

Определение 6. *Мерой опровержимости $I_{S(\Sigma)}(\varphi)$ для формул из $\Phi(\Sigma) = \big\{ \varphi \;\big|\; S(\varphi) \subset S(\Sigma) \big\}$ назовем величины*

$$I_{S(\Sigma)}(\varphi) = \sum_{i=0}^{n-2} \alpha_i \frac{\big|\,\mathrm{Mod}_{S(\Sigma)}\big(\varphi_{\frac{l}{n-1}}\big)\big|}{n^{|S(\Sigma)|}},$$

где α_i удовлетворяет условиям: $0 \leqslant \alpha_i \leqslant 1$, $\alpha_i + \alpha_{n-1-i} = 1$, $\alpha_k \geqslant \alpha_i$, *для всех* $i = 0, \ldots, \frac{n-1}{2}$ *и всех* $k = 0, \ldots, i$.

Лемма 4 (свойства меры $I_{S(\Sigma)}$). *Для любых* $\varphi, \psi \in \Phi(\Sigma)$

1) $0 \leqslant I_{S(\Sigma)}(\varphi) \leqslant 1$;
2) $I_{S(\Sigma)}(\varphi) + I_{S(\Sigma)}(\neg\varphi) = 1$;
3) $I_{S(\Sigma)}(\varphi \wedge \psi) \geqslant \max\{I_{S(\Sigma)}(\varphi), I_{S(\Sigma)}(\psi)\}$;
4) $I_{S(\Sigma)}(\varphi \vee \psi) \leqslant \min\{I_{S(\Sigma)}(\varphi), I_{S(\Sigma)}(\psi)\}$;
5) $I_{S(\Sigma)}(\varphi \vee \psi) + I_{S(\Sigma)}(\varphi \wedge \psi) = I_{S(\Sigma)}(\varphi) + I_{S(\Sigma)}(\psi)$;
6) $I^3_{S(\Sigma)}(\varphi \wedge \psi) = \frac{1}{2}\bigl(I^3_{S(\Sigma)}(\varphi) + I^3_{S(\Sigma)}(\psi) + \rho^3_{S(\Sigma)}(\neg\varphi, \neg\psi)\bigr)$;
7) $I^3_{S(\Sigma)}(\varphi \vee \psi) = \frac{1}{2}\bigl(I^3_{S(\Sigma)}(\varphi) + I^3_{S(\Sigma)}(\psi) - \rho^3_{S(\Sigma)}(\neg\varphi, \neg\psi)\bigr)$.

Эта лемма доказывает общие свойства меры опровержимости, а для $n = 3$ указывает на справедливость гипотезы Г. С. Лбова, верную для $n = 2$, см. [1]. При $n > 3$ такой связи с расстоянием нет, но есть более сложные зависимости. Доказаны также и другие свойства расстояний и меры опровержимости для частного случая $n = 3$, похожие на случай $n = 2$ (см., например, [1]). Все результаты использованы при написании программы вторым автором и апробированы на прикладной задаче при различных n. Подбор нужного значения n в конкретной задаче является частью процесса адаптации для введения расстояния и меры опровержимости для получения более тонких знаний. В случае $n = 2$ проведены теоретические исследования по следующим вопросам. При организации поиска логических закономерностей требуются расстояния между высказываниями экспертов и формулами в моделях в произвольный (текущий) момент времени с фиксированными знаниями. Планируем обработку сообщений экспертов в различные моменты (срезы) времени с возможностью того, что исходные гипотезы-предположения у экспертов, вообще говоря, могут изменяться. Значит, будет происходить адаптация во времени самой теории (по знаниям экспертов), и, соответственно этому, будем применять другие модели экспертов. Аппарат для обработки таких знаний подготовлен в работах Викентьева А. А., начатых со Лбовым Г. С. и Кореневой Л. Н. Сигнал о смене класса моделей (а, значит, и теории) будет исходить либо от самих экспертов (по их изменяющимся знаниям), либо при получении неправильных результатов инженером-разработчиком Базы Знаний при использовании старой теории.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 07-01-00331а.

Литература

[1] *Лбов Г. С., Старцева Н. Г.* Логические решающие функции и вопросы статистической устойчивости решений. — Новосибирск: Изд-во Ин-та математики СО РАН, 1999.

[2] *Кейслер Г., Чэн Ч. Ч.* Теория моделей. — М.: Мир, 1977.

[3] *Карпенко А. С.* Логики Лукасевича и простые числа — М.: Наука, 2000.