К определению сильного перемешивания разбиений пространства

Трофимов О. Е.
trofimov@iae.nsk.su
Новосибирск, Институт автоматики и электрометрии СО РАН

Для большого количества проблем дешифровки и определения скрытых смыслов нужно уметь решать следующую задачу: «Является ли случайной предъявляемая последовательность чисел?».

А. Н. Колмогоров предложил в качестве меры сложности рекурсивно перечислимой последовательности чисел минимальную длину программы, порождающей эту последовательность [4]. Под длинной порождающей программы можно понимать логарифм номера порождающей функции в некоторой нумерации частично рекурсивных функций. А. Н. Колмогоров предложил также связать меру случайности последовательности с мерой её сложности.

Наряду с понятием случайной последовательности целесообразно рассматривать случайное разбиение натурального ряда в целом. Такое разбиение обладает свойствами сильного перемешивания. Подобные разбиения могут рассматриваться в пространствах произвольной размерности. В частности, в непрерывном случае примером разбиения трехмерного шара может служить клубок нитей (координаты каждой нити — отдельное множество). Примером разбиения с сильным перемешиванием может быть клубок сильно перепутанных нитей. В дискретном варианте использование нумерации кортежей позволяет свести задачи в пространствах произвольной размерности к одномерному случаю.

По нашему мнению, в дискретном случае для формализации понятия разбиения сильным перемешиванием (хаотического разбиения) целесообразно использовать понятие предполной позитивной нумерации, введенное А. И. Мальцевым [5, 6].

Пусть задано некоторое семейство объектов. Будем говорить, что задана нумерация этого семейства, если каждому объекту поставлено в соответствие некоторое натуральное число. Один объект может иметь несколько номеров, но разным объектам должны соответствовать разные числа. Если речь идет, например, об эффективно вычислимых функциях, то номерами этих функций могут быть коды соответствующих программ.

Для частично-рекурсивных функций существует универсальная функция Клини $K(n,m)$ со следующим свойством. Для любой частично-рекурсивной функции $f(m)$ существует n такое, что $K(n,m) = f(m)$, число n называется клиниевским номером функции $f(m)$. В клиниевской нумерации любое число является номером некоторой функции. В дальнейшем мы будем рассматривать нумерации, в которых любое натуральное число является номером некоторого объекта. Клиниевская нумерация обладает двумя важными свойствами.

1. Для любой общерекурсивной функции $g(n)$ существует n_0, такое, что $K(g(n_0), m) = K(n_0, m)$. Это означает, что числа $g(n_0)$ и n_0 являются номерами одной и той же функции, причем число n_0 можно эффективно найти по номеру функции $g(n)$. Иными словами для любого общерекурсивного отображения $g(n)$ существует неподвижная точка, которую можно эффективно найти.
2. Для любой частично-рекурсивной функции $\varphi(n)$ существует общерекурсивная функция $\alpha(n)$ такая, что $K(\varphi(n), m) = K(\alpha(n), m)$, если $\varphi(n)$ определено, и $\alpha(n)$ есть номер нигде не определенной функции, если $\varphi(n)$ не определено.

Нумерации, удовлетворяющие свойству 1, А. И. Мальцев назвал предполными, а нумерации, удовлетворяющие свойству 2, — полными [5, 6]. В случае произвольных семейств объектов роль нигде не определенной функции играет некоторый выделенный элемент.

Если каждое натуральное число является номером некоторого элемента, то нумерация задает разбиение натурального ряда на классы эквивалентности, являющиеся номерами одного элемента. Нумерация называется позитивной, если все ее классы эквивалентности являются рекурсивно-перечислимыми множествами. Полные нумерации не могут быть позитивными, так как множество номеров выделенного элемента не является рекурсивно-перечислимым [6].

Существуют предполные позитивные нумерации [1–3], они и дают пример рекурсивно-перечислимого хаоса [7, 8].

Здесь мы приведем пример позитивной предполной нумерации, построенный автором настоящей работы. Этот пример с согласия автора и со ссылкой на него приведен в [2].

Рассмотрим функцию $\varphi(n) = K(n, m)$, как уже говорилось выше, $K(n, m)$ — универсальная функция Клини.

Рассмотрим семейство множеств $\{A_r\}$, где r — произвольное натуральное число, а множество A_r удовлетворяет следующим условиям:

1) $r \in A_r$;
2) если $r_1, \ldots, r_n \in A_r$, то из условия $\bigcup_{i=1}^{n} r_i \bigcap \{n, \varphi(n)\} \neq \varnothing$ следует $n \in A_r \vee \varphi(n) \in A_r$;
3) других элементов в A_r нет.

Рекурсивная перечислимость множеств A_r и теорема о неподвижной точке следуют непосредственно из построения. Из построения также следует, что различные номера нигде не определенной функции принадлежат разным множествам A_r, это означает, что ни один из классов эквивалентности не совпадает со всем натуральным рядом, то есть, мы действительно получаем разбиение множества натуральных чисел.

Разбиения, построенные выше, могут быть использованы для кодирования информации. Если не известна порождающая функция разбиения, его очень трудно отличить от случайного. Предложенная конструкция может использоваться для построения статистических гипотез на независимость. Следует отметить, что для эффективной работы методов, основанных на предполных разбиениях, необходимы последовательности большого размера.

Литература

[1] *Ершов Ю.* Теория нумераций. — Москва: Наука, 1977.

[2] *Ершов Ю.* Теория нумераций 1. — Новосибирск: Наука, 1966.

[3] *Ershov Y.* Theory of enumerations, Part II // Z. Math. Log. und Grundl. Math. — 1975. — T. 21. — Pp. 473–584.

[4] *Колмогоров А. Н.* Три подхода к определению информации // Проблемы передачи информации — 1965. — № 1. — С. 1–7.

[5] *Мальцев А. И.* Полно нумерованные множества // Алгебра и логика — 1963. — № 2. — С. 4–29.

[6] *Мальцев А. И* К теории семейств вычислимых объектов // Алгебра и логика — 1964. — № 4. — С. 5–31.

[7] *Трофимов О. Е.* О рекурсивно нумерованном хаосе // Тез. межд. конф. «Колмогоров и современная математика». — Москва: МГУ, 2003. — С. 699.

[8] *Trofimov O. E.* Chaos and Recursive Denumerrability // Int. conf. on modelling & simulation (ICMS'04-Spain), Valladolid, 2004. — Pp. 1933–194.