Объективизация экспертных оценок, выставленных в ранговых шкалах

Стрижов В. В., Казакова Т. В.
strijov@ccas.ru
Москва, Вычислительный центр РАН

Предложен способ построения интегральных индикаторов качества сложных объектов с использованием экспертных оценок и измеряемых данных. Предполагается, что экспертные оценки выставлены в ранговых шкалах.

Ранее были предложены два подхода к построению индексов с использованием экспертных оценок. Первый подход состоит в нахождении параметров модели свертки данных, которые доставляют минимум невязки между вычисленным индексом и его экспертной оценкой [1]. Второй подход имеет целью согласовать экспертные оценки индексов, весов показателей, и заключается в поиске компромиссного решения [2, 3].

Предложен алгоритм вычисления индексов на основе экспертных оценок, выполненных в ранговых шкалах. Результатом работы алгоритма являются индексы, уточняющие экспертные оценки, и не противоречащие измеряемым данным. Индексы являются устойчивыми, то есть не зависящими от наличия объектов с неординарными описаниями. Измеряемые данные и экспертные оценки обобщаются в непротиворечивую систему.

Задано множество, состоящее из m сравнимых объектов, которые описаны набором из n показателей.

Задана матрица описаний «объект-показатель» $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Элемент матрицы a_{ij} — значение j-го показателя i-го объекта. Заданы начальные экспертные оценки. Каждому объекту поставлена в соответствие экспертная оценка качества объекта, а каждому показателю — экспертная оценка его важности. То есть заданы два упорядоченных набора $\mathbf{q}_0 \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{w}_0 \in \mathbb{R}^n$. Оценки $\mathbf{q}_0$, $\mathbf{w}_0$, допускают, по условию, произвольные монотонные преобразования. Без ограничения общности будем считать, что на наборах экспертных оценок введено отношение порядка такое, что

$$\mathbf{q}_0 = \{q_i \colon q_1 \geqslant \cdots \geqslant q_m \geqslant 0\}, \quad \mathbf{w}_0 = \{w_j \colon w_1 \geqslant \cdots \geqslant w_n \geqslant 0\}. \qquad (1)$$

Назначена линейная модель вычисления индексов. *Интегральный индикатор* объекта — свертка вида $q_i = \sum\limits_{j=1}^{n} w_j g_j(a_{ij})$, где g_j — функция приведения показателей в единую шкалу. Далее предполагается $g_j = \mathrm{id}_j$.

Требуется построить индекс, основанный на измеряемых данных, и не противоречащий мнениям экспертов.

Согласованными значениями интегрального индикатора и весов показателей называются такие значения $\mathbf{q}$ и $\mathbf{w}$, при которых выполняется условие

$$\begin{cases} \mathbf{q} = A\mathbf{w}; \\ \mathbf{w} = A^{+}\mathbf{q}. \end{cases} \tag{2}$$

В работе [3] описан метод согласования экспертных оценок в линейных шкалах. Он заключается в следующем. Каждый объект из множества заданных объектов можно оценить двумя путями: непосредственно через экспертную оценку $\mathbf{q}_0$ и через взвешенную сумму значений показателей объекта, $\mathbf{q}_1 = A\mathbf{w}_0$, где веса определяются экспертными оценками показателей $\mathbf{w}_0$. По исходным экспертным оценкам значения вектора интегрального индикатора $\mathbf{q}_0$ вычисляется вектор весов показателей $\mathbf{w}_1 = A^{+}\mathbf{q}_0$, где A^{+} — оператор, псевдообратный оператору A. В общем случае вектор экспертной оценки $\mathbf{q}_0$ объектов и вектор взвешенной суммы значений показателей объектов $\mathbf{q}_1$ различны. Также различны векторы $\mathbf{w}_0$ и $\mathbf{w}_1$. Согласованное решение отыскивается на отрезках, соединяющих соответствующие пары векторов.

Псевдообратный оператор A^{+}, такой что $A^{+}A = I_n$, $AA^{+} = I_m$, отыскивается с помощью сингулярного разложения $A = U\Lambda V^T$ и равен $A^{+} = V\Lambda^{-1}U^T$. При большой обусловленности A псевдообратный оператор регуляризуется. Для этого выполняется подстановка $\Lambda^{-1} \mapsto \Lambda^{-1} + r^{-1}I_n$, где r — коэффициент регуляризации.

Рассмотрим следующий алгоритм согласования экспертных оценок, выставленных в ранговых шкалах. Отношение порядка (1) задает конусы $\mathcal{Q}_0 \in \mathbb{R}^m_+$ и $\mathcal{W}_0 \in \mathbb{R}^n_+$ в пространстве оценок объектов и в пространстве показателей соответственно. Линейный оператор A отображает конус $\mathcal{W}_0$ в конус $A\mathcal{W}_0$. Оператор A^{+} отображает конус $\mathcal{Q}_0$ в конус $A^{+}\mathcal{Q}_0$. Обозначим $\mathcal{W}_\rho = \mathcal{W}_0 \cup A^{+}\mathcal{Q}_0$ и $\mathcal{Q}_\rho = \mathcal{Q}_0 \cup A\mathcal{W}_0$.

Справедливы утверждения. Если конус $\mathcal{Q}_\rho$, не пуст, то не пуст также и конус $\mathcal{W}_\rho$, в противном случае оба конуса пусты. Для каждого вектора $\mathbf{w}_\rho \in \mathcal{W}_\rho$ найдется согласованный с ним вектор $\mathbf{q}_\rho \in \mathcal{Q}_\rho$, такой что выполняется равенство (2).

Таким образом, в случае непустого пересечения конусов, экспертные оценки являются согласованными в ранговых шкалах и удовлетворяют условию (2). Согласованными экспертными оценками является любая согласованная пара $\mathbf{q}_\rho, \mathbf{w}_\rho$, принадлежащая пересечениям конусов в соответствующих пространствах.

Для отыскания пресечения конусов $\mathcal{Q}_\rho$ опишем соответствующие множества системами линейных неравенств. Представим конус $\mathcal{Q}_0$, элементы которого удовлетворяют условию (1), в виде двухдиагональной матрицы $\mathcal{Q}_0$, в которой элементы на главной диагонали равны 1, а элементы на диагонали $(1,2),\ldots,(n-1,n)$ равны -1. Представим произведение $A\mathcal{W}_0$ также в виде матрицы коэффициентов в пространстве $\mathbb{R}^{m\times m}$.

Множество векторов $\mathbf{q}_\rho \in \mathcal{Q}_\rho$ является решением объединенной системы линейных неравенств

$$\begin{cases} \mathcal{Q}_0\mathbf{q}_\rho \geqslant 0; \\ (A\mathcal{W}_0)\mathbf{q}_\rho \geqslant 0. \end{cases}$$

Полученное пересечение $\mathcal{Q}_\rho$ также является конусом, возможно, тривиальным, каждый элемент которого является интегральным индикатором, удовлетворяющим условию согласованности (2).

Следует отметить, что независимо от того, имеет система линейных неравенств решение или нет, представляется возможным найти согласованный линейный индикатор, минимально отличающийся от экспертных оценок. Для этого, если конус $\mathcal{Q}_\rho$ пуст, на единичной сфере S отыскивается точка $\mathbf{q}_\rho \in s = (A\mathbf{w},\mathbf{q})$, на дуге $s = \arg\min \sigma(s)$, где $A\mathbf{w} \in A\mathcal{W} \cap S$, $\mathbf{q} \in \mathcal{Q} \cap S$ и $\sigma(s)$ — длина дуги. В противном случае, отыскивается точка $\mathbf{q}_\rho$, равноудаленная от вершин конуса $\mathcal{Q}_\rho \cap S$. Вектор весов показателей отыскивается посредством псевдообратного оператора A^+.

Полученные процедуры нахождения интегрального индикатора использованы для объективизации экспертных оценок в следующих прикладных задачах: для построения интегральных индикаторов развития человеческого потенциала регионов РФ и интегральных индикаторов качества управления Особо охраняемыми природными территориями РФ.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 07-07-00181.

Литература

[1] *Айвазян С А., Мхитарян В. С.* Прикладная статистика и основы эконометрики. — М.: ЮНИТИ, 1998. — 363 с.

[2] *Strijov V., Shakin V.* Index construction: the expert-statistical method // Environmental research, engineering and management. — 2003. — V. 26, № 4. — Pp. 51–55.

[3] *Стрижов В. В.* Уточнение экспертных оценок с помощью измеряемых данных // Заводская лаборатория. — 2006. — Т. 92, № 6. — С. 59–64.