Энтропийные методы исследования итеративных процедур коллективной оценки и выбора вариантов

Шоломов Л. А.
sholomov@isa.ru
Москва, Институт Системного анализа РАН

Содержательные задачи выбора лучших объектов, как правило, плохо формализованы (некорректны). Мы руководствуемся подходом к исследованию некорректных процедур, предложенным Ю. И. Журавлевым применительно к задачам распознавания и классификации, и состоящим в том, чтобы вместо конкретных процедур изучать строгими математическими методами свойства классов процедур [1]. Цель данной работы — рассмотрение с указанных позиций некоторого класса многотуровых процедур оценки вариантов. Подробное изложение имеется в [2].

Пусть для выбора лучшего объекта из k заданных используется процедура с n участниками, цель которой — приписывание каждому объекту j некоторого показателя $q_j \geqslant 0$, $q_1 + \ldots + q_k = 1$, интерпретируемого как «мера того, что объект является лучшим». Считаем, что на каждом шаге t участник i, $1 \leqslant i \leqslant n$, приписывает объекту j, $1 \leqslant j \leqslant k$, показатель $q_j^{(i)}(t) \geqslant 0$, $q_1^{(i)}(t) + \ldots + q_k^{(i)}(t) = 1$. По этой информации организаторы процедуры находят набор $Q(t) = (q_1(t), \ldots, q_k(t))$ агрегированных (средних) показателей и сообщают его участникам. Каждый участник i некоторым образом преобразует (субъективизирует) его, образуя новый нормированный набор $f_i(Q(t)) = S^{(i)}(t) = (s_1^{(i)}(t), \ldots, s_k^{(i)}(t))$, и, задавшись некоторым $\theta^{(i)}(t)$, $0 \leqslant \theta^{(i)}(t) \leqslant 1$, сдвигается от прежнего набора показателей $Q^{(i)}(t)$ в сторону $S^{(i)}(t)$, полагая $Q^{(i)}(t+1) = (1 - \theta^{(i)}(t))Q^{(i)}(t) + \theta^{(i)}(t)S^{(i)}(t)$. Если процедура сходится, результатом считается агрегированный набор $Q = (q_1, \ldots, q_k)$, соответствующий точке сходимости, иначе она безрезультатна. Варьируя f_i, получаем разные модели.

Будем полагать, что каждый участник i разбивает объекты на ряд классов $T_1^{(i)}, \ldots, T_{k_i}^{(i)}$, считая объекты из одного класса равно предпочтительными, а из каждого предыдущего класса более предпочтительными, чем из следующих. Субъективизирующие функции f_i, $1 \leqslant i \leqslant m$, зависят от разбиений $\mathbf{T}^{(i)} = (T_1^{(i)}, \ldots, T_{k_i}^{(i)})$.

Модель типа 0 относится к случаю $\mathbf{T}^{(i)} = (T_1^{(i)}, T_2^{(i)})$. В ней

$$s_j^{(i)}(t) = \frac{\lambda_j^{(i)} q_j(t))}{\sum_u \lambda_u^{(i)} q_u(t)}, \qquad \lambda_j^{(i)} = \begin{cases} 1, & j \in T_1^{(i)}; \\ 0, & j \in T_2^{(i)}. \end{cases}$$

Модель типа 1 обобщает предыдущую на случай нескольких классов $T_1^{(i)}, \ldots, T_{k_i}^{(i)}$. Поведение участника i задается цепочкой чисел $\gamma_1^{(i)} \geqslant \ldots \geqslant \gamma_{k_i}^{(i)} \geqslant 0$. Компоненты $s_j^{(i)}(t)$ набора $S^{(i)}(t)$ вычисляются в соответствии с предыдущей формулой при $\lambda_j^{(i)} = \gamma_m^{(i)}$, где $j \in T_m^{(i)}$.

Модель типа 2. По исходным классам $T_1^{(i)}, \ldots, T_{k_i}^{(i)}$ строится цепочка вложенных классов $\hat{T}_1^{(i)} \subset \ldots \subset \hat{T}_{k_i}^{(i)}$, $\hat{T}_l^{(i)} = T_1^{(i)} \cup \ldots \cup \hat{T}_l^{(i)}$. Классу $\hat{T}_l^{(i)}$ сопоставляется набор $S^{(i,l)}(t) = (s_1^{(i,l)}(t), \ldots, s_k^{(i,l)}(t))$, образуемый согласно модели типа 0. Поведение участника i описывается набором коэффициентов $\alpha_l^{(i)} \geqslant 0$, $1 \leqslant l \leqslant k_i$, $\alpha_1^{(i)} + \ldots + \alpha_{k_i}^{(i)} = 1$. В качестве $S^{(i)}(t)$ берется набор $\alpha_l^{(1)} S^{(1,l)}(t) + \ldots + \alpha_l^{(n)} S^{(n,l)}(t)$.

Общая модель. Поведение участника i задается некоторым количеством m_i цепочек $\gamma_1^{(i,l)} \geqslant \ldots \geqslant \gamma_{k_i}^{(i,l)} \geqslant 0 \quad (1 \leqslant l \leqslant m_i)$, где k_i — число классов разбиения в $\mathbf{T}^{(i)}$, и набором $(\alpha_1^{(i)}, \ldots, \alpha_{m_i}^{(i)})$, $\alpha_1^{(i)} + \ldots + \alpha_{m_i}^{(i)} = 1$, положительных чисел. Вначале, в соответствии с моделью типа 1, при $\lambda_j^{(i,l)} = \gamma_m^{(i,l)}$, $j \in T_m^{(i)}$, находятся m_i наборов $S^{(i,l)}(t)$. Затем, подобно модели 2, вычисляется их линейная комбинация $S^{(i)}(t)$.

С общей моделью M свяжем функцию энтропийного типа от набора переменных $Q = (q_1, \ldots, q_k)$, $q_1 \geqslant 0, \ldots, q_k \geqslant 0$, $q_1 + \ldots + q_k = 1$,

$$H_M(Q) = -\sum_{i,l} \alpha_l^{(i)} \ln\left(\sum_j \lambda_j^{(i,l)} q_j\right),$$

где $1 \leqslant i \leqslant n$, $1 \leqslant l \leqslant m_i$, $1 \leqslant j \leqslant k$.

Доказательство сходимости и устойчивости процедур основывается на следующем утверждении.

Теорема 1. *Если $\theta^{(1)}(t) = \ldots = \theta^{(n)}(t) = \theta(t) > 0$, то справедливо неравенство $H_M(Q(t)) \geqslant H_M(Q(t+1))$, которое при $Q(t+1) \neq Q(t)$ является строгим.*

Обозначим через D_M множество точек минимума функции H_M. С помощью теоремы 1 доказывается

Теорема 2. *Если выполнено условие $\theta^{(1)}(t) = \ldots = \theta^{(n)}(t) = \theta(t) > 0$, то последовательность $\{Q(t)\}$ агрегированных показателей сходится к множеству D_M.*

Можно показать, что в типичном случае множество D_M состоит из единственной точки, которая и является точкой сходимости процедуры.

Процедуру назовем *устойчивой*, если найдется точка Q такая, что процедура может сойтись лишь к точке Q, и существует вариант осуществления процедуры, при котором она сходится (к точке Q).

Следующее утверждение, в сочетании с теоремой 2, показывает, что в типичном случае (когда множество D_M одноэлементно) процедуры рассматриваемого вида при весьма общих предположениях устойчивы.

Теорема 3. *Если $\theta(t) = \min\bigl\{\theta^{(1)}(t), \ldots, \theta^{(n)}(t)\bigr\}$, ряд $\sum_t \theta(t)$ расходится, и набор агрегированных показателей, получаемых в результате процедуры, сходится к точке Q, то $Q \in D_M$.*

Будем говорить, что решение $Q = (q_1, \ldots, q_k)$ *противоречит мнению участника* i, если $q_j = 0$ для всех $j \in T_1^{(i)}$. Решение Q назовем *корректным*, если оно не противоречит мнению ни одного из участников. Множество моделей назовем *корректно полным*, если в нем могут быть получены все корректные решения, реализуемые моделями общего вида.

Будем считать, что множеством решений, связанных с моделью M, является D_M. Модель M назовем *максимально точной*, если $D_M \subseteq D_{M'}$ для любой модели M' такой, что $D_M \cap D_{M'} \neq \varnothing$.

Теорема 4. *Все модели типа 2 являются корректными и максимально точными, а множество моделей типа 2 корректно полно.*

Таким образом, модели типа 2 обладают в рассматриваемом классе моделей наилучшими свойствами.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 06-01-00577 и ОИТВС РАН (программа «Фундаментальные основы информационных технологий и систем»).

Литература

[1] *Журавлев Ю. И.* Об алгебраическом подходе к решению задач распознавания или классификации // Проблемы кибернетики. Вып. 33. — М.: Наука, 1978. — С. 5–68.

[2] *Шоломов Л. А.* Исследование одного класса динамических процедур коллективного выбора // Нелинейная динамика и управление. Вып. 5. — М.: Физматлит, 2006.