Алгоритмы эмпирического восстановления случайной и нечеткой формы изображения

Шишаков В. В., Пытьев Ю. П.

shift@cmpd2.phys.msu.ru, pytyev@phys.msu.ru

Москва, МГУ им. М. В. Ломоносова, физический факультет

Пусть регистрируемое изображение объекта является элементом евклидова пространства $\mathcal{R}_N$. Формой изображения объекта будет множество $V \in \mathcal{R}_N$ его изображений, получаемых при всех возможных изменениях условий регистрации [1]. Например, в задаче анализа изображений рукописных цифр, формой изображения цифры «1» будет множество любых изображений единицы, в том числе и различной яркости, контраста и с различными искажениями формы единицы.

Методы морфологического анализа изображений разрабатывались для анализа и интерпретации изображений объектов, полученных при различных и неизвестных условиях регистрации (таких как освещение, размытие), при которых «геометрическая» форма объекта остается неизменной. Очевидно, что решая задачу узнавания рукописных цифр, мы ожидаем увидеть их на предъявленном изображении более-менее «прямыми» и «правильными», Однако, на реальных изображениях рукописных цифр искажения по форме будут всегда, например, из-за разницы почерков разных людей. Подобные искажения формы, будут носить случайный характер, и разумно будет предположить, что более вероятно можно будет увидеть менее искаженное изображение цифры. Чтобы учесть эти соображения, воспользуемся понятием случайной формы [3].

Пусть дано разбиение $\bigcup\limits_{\omega\in\Omega} \omega = \mathcal{R}_N$ пространства $\mathcal{R}_N$ на непересекающиеся множества $\omega \subset \mathcal{R}_N$, совокупность которых обозначим Ω, минимальная σ-алгебра $\mathcal{A}$ подмножеств множества Ω, содержащая все множества $\{\omega\}$, $\omega \in \Omega$, и вероятность $\mathrm{Pr}\colon \mathcal{A} \to [0,1]$. Вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{Pr})$, в котором элементарными событиями являются множества $\omega \in \Omega$ в пространстве $\mathcal{R}_N$ является математической моделью случайной формы.

Каждому событию $A \in \mathcal{A}$ соответствует форма $V = \bigcup\limits_{\omega\in A} \omega \subset \mathcal{R}_N$, вероятность которой есть $\mathrm{Pr}(A)$. Множество всех форм, соответствующих σ-алгебре $\mathcal{A}$, обозначим $\mathbb{V}_{\mathcal{A}}$, $\quad \mathbb{V}_{\mathcal{A}} = \big\{V\colon V = \bigcup_{\omega\in A} \omega,\ A \in \mathcal{A}\big\}$.

Например, если множество Ω состоит из всех лучей в $\mathcal{R}_N$, исходящих из начала координат. Каждый луч — форма любого изображения, как элемента $\mathcal{R}_N$, принадлежащего лучу. S_N — единичная сфера в $\mathcal{R}_N$ с центром в начале координат, $\mathcal{A}'$ — борелевская σ-алгебра подмножеств сферы S_N, а $\mathcal{A}$ — взаимно однозначно связанная с ней σ-алгебра подмножеств множества Ω. Задав на $\mathcal{A}'$ вероятность $\Pr$, зададим соответствующую вероятность и на $\mathcal{A}$. При этом соответствующее $\mathcal{A}$ множество форм $\mathbb{V}_{\mathcal{A}}$ содержит все линейные подпространства в $\mathcal{R}_N$, все конусы с вершиной в начале координат, и т. п.

Таким образом, задачу идентификации случайной формы изображения можно сформулировать следующим образом. Пусть заданы случайные формы: $F_i = (\Omega, \mathcal{A}, \Pr_i)$, где вероятности $\Pr_i$ заданы плотностями $\mathrm{pr}^{(i)}(\cdot)$, где $i = 1, 2, \ldots$ соответственно, и предъявляемое для идентификации изображение ξ формируется по схеме

$$\xi = f + \nu, \tag{1}$$

где $f \in \mathcal{R}_N$ — произвольный элемент F_i, а $\nu \in R_N$ — случайный элемент с плотностью распределения $\mathrm{pr}_\nu(\cdot)$, независимый от f. Требуется по предъявленному изображению ξ определить, какую случайную форму F_1, $F_2, \ldots$ имеет элемент f, т. е. определить ν.

Заметим, что если f имеет случайную форму F_t, $t = 1, 2, \ldots,$ то ξ является случайным элементом пространства $\mathcal{R}_N$ с одной из следующих плотностей распределения: $\mathrm{pr}_\xi^{(i,\,\varphi)}(x) = \int_\Omega \mathrm{pr}^{(i)}(\omega)\,\mathrm{pr}_\nu(x - \varphi_\omega)\,\mathrm{d}\omega$, где символом φ обозначена произвольная совокупность элементов $\mathcal{R}_N$ вида $\varphi = \{\varphi_\omega \in \omega,\ \omega \in \Omega\}$.

Введём следующие множества распределений: $\mathbb{P}\mathrm{r}_i \stackrel{\mathrm{def}}{=} \bigl\{\mathrm{pr}_\xi^{(i,\,\varphi)}\bigr\}$, $\mathcal{H}_0 \stackrel{\mathrm{def}}{=} \Cap \mathbb{P}\mathrm{r}_i$, $\mathcal{H}_i \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathbb{P}\mathrm{r}_i \setminus \mathcal{H}_0$, $i = 1, 2, \ldots$ Для идентификации предъявленного изображения можно воспользоваться минимаксным критерием $\bigl(\widetilde{\pi}_0(x), \widetilde{\pi}_1(x), \ldots\bigr)$, $x \in \mathcal{R}_N$ проверки гипотез $\mathcal{H}_0$, $\mathcal{H}_1, \ldots,$ который минимизирует вероятность ошибки и находится как решение задачи на минимакс [2]

$$\begin{cases} \max\limits_{i=0,1,\ldots} \alpha_i \sim \min\limits_{\pi_i,\ i=0,1,\ldots}; \\ \sum\limits_{i=0,1,\ldots} \pi_i(x) = 1, \quad x \in \mathcal{R}_N; \\ \pi_i(x) \geqslant 0, \quad x \in \mathcal{R}_N, \quad i = 0, 1, \ldots; \end{cases} \tag{2}$$
$$\text{где } \alpha_i \stackrel{\mathrm{def}}{=} \max_{\mathrm{pr}_\xi^{(t,\,\varphi)}(\cdot) \notin \mathcal{H}_i} \int_{\mathcal{R}_N} \mathrm{pr}_\xi^{(t,\,\varphi)}(x)\,\pi_i(x)\,dx; \quad i = 0, 1, \ldots$$

При этом гипотеза $\mathcal{H}_1$ свидетельствует в пользу случайной формы F_1, гипотеза $\mathcal{H}_2$ — в пользу F_2 и т. д., а гипотеза $\mathcal{H}_0$ означает, что в рамках постановки (3) по предъявленному изображению невозможно определить, изображением какой случайной формы является f.

По аналогии с понятием случайной формы изображения, определим понятие нечёткой формы как возможностное пространство $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$, где Ω — множество непересекающихся форм, образующих разбиение $\mathcal{R}_N$, $\mathcal{A}$ — σ-алгебра подмножеств Ω, а P — заданная на ней возможность [2].

Тогда задача идентификации нечеткой формы предъявленного изображения будет формулироваться так: введём следующие множества распределений: $\mathbb{P}_i \stackrel{\mathrm{def}}{=} \left\{\mathrm{p}_\xi^{(i,\varphi)}\right\}$, $\mathcal{H}_0 \stackrel{\mathrm{def}}{=} \Cap \mathbb{P}_i$, $\mathcal{H}_i \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathbb{P}_i \backslash \mathcal{H}_0$. Для идентификации предъявленного изображения можно воспользоваться минимаксным критерием $(\widetilde{\pi}_0(x), \widetilde{\pi}_1(x), \ldots)$, $x \in \mathcal{R}_N$, проверки гипотез $\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1, \ldots$, который минимизирует возможность ошибки и находится как решение задачи на минимакс [2]

$$\begin{cases} \max \alpha_i \sim \min\limits_{\pi_i}, \\ \max \pi_i(x) = 1,\ x \in \mathcal{R}_N \\ \pi_i(x) \geqslant 0,\ x \in \mathcal{R}_N,\ i = 0, 1, \ldots, \end{cases} \tag{3}$$

$$\text{где } \alpha_i \stackrel{\mathrm{def}}{=} \max_{\mathrm{p}_\xi^{(i,\varphi)}(\cdot) \notin \mathcal{H}_i} \sup_{x \in \mathcal{R}_N} \min\left(\mathrm{p}_\xi^{(i,\varphi)}(x),\ \pi_i(x)\right),\ i = 0, 1, \ldots$$

При этом принятие той или иной гипотезы интерпретируется аналогично рассмотренной выше статистической гипотезе [3].

В докладе рассматриваются алгоритмы эмпирического восстановления [4] случайных и нечетких форм изображения по данным обучающей выборки на примере задачи распознавания рукописных цифр, а также будет проведено сравнение статистического и возможностного подходов к решению этой задачи.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проекты № 05-01-00532-а, № 05-01-00615-а.

Литература

[1] *Пытьев Ю. П.* Морфологический анализ изображений // Докл. АН СССР. — 1983. — Т. 269, № 5. — С. 1061–1064.

[2] *Пытьев Ю. П.* Возможность как альтернатива вероятности. Математические и эмпирические основы, применения. — М.: Физматлит, 2006.

[3] *Зубюк А. В., Пытьев Ю. П.* Случайная и нечёткая морфология: эмпирическое восстановление модели, идентификация // 9-я межд. конф. «Интеллектуальные системы и компьютерные науки». — 2006.

[4] *Пытьев Ю. П.* Математические методы и адаптивные алгоритмы эмпирического построения теоретико-возможностной модели стохастического объекта // ММРО-13 (в настоящем сборнике). — 2007. — С. **??**–**??**.