Построение корректного распознающего алгоритма минимальной степени в алгебре над множеством алгоритмов вычисления оценок

Романов М. Ю.
mromanov@ccas.ru
Москва, МФТИ

В настоящей работе рассматривается метод построения распознающего алгоритма в алгебраическом расширении наименьшей степени над множеством алгоритмов вычисления оценок (АВО).

Используются обозначения, применяемые в работе [1].

Рассматриваемые алгоритмы составляются из распознающего оператора и решающего правила. Распознающий оператор вычисляет оценки близости объектов к классам, а решающее правило на основе этих оценок классифицирует объекты.

Для начальной информации I_0 и контрольной выборки $\widetilde{S}^q$ запишем задачу распознавания $Z = (I_0, \widetilde{S}^q)$. Будем считать, что задано множество распознающих операторов (РО) $B^* = \{B_1, \ldots, B_n\}$. Рассматривается алгоритм A, в котором распознающим оператором является полином над операторами $\{B_k\}$. Каждый оператор B_k строит матрицу оценок $B_k\,(Z) = \|\Gamma_k^{uv}\|_{q\times l}$; оператор C задан стандартным пороговым решающим правилом. В докладе рассматривается задача построения корректного алгоритма A минимальной степени, т. е. алгоритма, распознающий оператор которого является полиномом минимальной степени.

Рассматривается семейство распознающих операторов, для которых существует алгоритм вида

$$A = \left(\sum_{k=1}^{n} B_k^{x_k}\right) \circ C\,(c_1, c_2)\,,$$

корректный для задачи Z, см. [2]. Описан алгоритм нахождения набора степеней $x_k,\ k = 1, \ldots, n$, дающих корректный алгоритм минимальной степени, и рассмотрен вопрос уменьшения числа слагаемых полинома.

Так как оператор C фиксирован, в дальнейшем будем отождествлять построение корректного алгоритма A и построение соответствующего многочлена над множеством операторов B_k.

Для выборки $\{S^u\colon u = 1, \ldots, q\}$ и классов $\{K_v\colon v = 1, \ldots, l\}$ разобьём элементы матрицы ответов на 2 множества:

$$M_0 = \{(u, v) : S^u \notin K_v\};\ M_1 = \{(u, v) : S^u \in K_v\}.$$

В работе [2] показано, что для нахождения полинома минимальной степени нужно решить следующую оптимизационную задачу для нахождения вектора $\tilde{y} = \{y_1, \ldots, y_n\}$:

$$\begin{cases} \forall\,(u,v) \in M_0 \colon\ \varphi^{uv}\,(\tilde{y}) \leqslant c_1; \\ \forall\,(u,v) \in M_1 \colon\ \varphi^{uv}\,(\tilde{y}) \geqslant c_2; \\ \max\limits_{k=1,\ldots,n} y_k \to \min; \end{cases}$$

где введены обозначения: $y_k = e^{x_k}$, $\gamma_k^{uv} = \ln \Gamma_k^{uv}$, $\varphi^{uv}\,(\tilde{y}) = \sum_{k=1}^{n} y_k^{\gamma_k^{uv}}$.

Результаты

Используя результаты работы [3], имеем, что для любого решения этой оптимизационной задачи выполняется $0 \leqslant y_k \leqslant ql$, $k = 1, \ldots, n$. Тогда задачу можно записать в виде

$$R = \Bigl\{\tilde{y} \in U,\ \max_{k=1,\ldots,n} y_k \to \min\Bigr\},$$

где

$$U = \left\{ \tilde{y} \;\middle|\; \begin{array}{l} \varphi^{uv}(\tilde{y}) \leqslant c_1,\ \text{для всех } (u,v) \in M_0; \\ \varphi^{uv}(\tilde{y}) \geqslant c_2,\ \text{для всех } (u,v) \in M_1; \\ 0 \leqslant y_k \leqslant ql,\ \text{для всех } k = \overline{1,n} \end{array} \right\}.$$

В работе [2] показано, что решение этой задачи содержится среди решений вспомогательных задач $R_I = \{\tilde{y} \in U_I,\ y_{i_1} \to \min\}$, с множеством ограничений $U_I = \{\tilde{y} \in U,\ y_{i_1} = y_{i_2} = \ldots = y_{i_m}\}$, для некоторого непустого множества индексов $I = \{i_1, \ldots, i_m\} \subseteq \{1, \ldots, n\}$. Используя метод линеаризации, можно свести задачу R_I к задаче квадратичного программирования [4].

При реализации метода решения задачи квадратичного программирования вместо симплекс-метода может быть использован обобщенный метод Ньютона так, как описано в статье [5]. Кроме того, метод Ньютона может быть непосредственно применен к решению задачи квадратичного программирования [6].

Описана процедура перебора задач R_I, позволяющая сократить перебор за счёт исключения вспомогательных задач, заведомо не дающих решение исходной. Указывается один метод последовательного уменьшения областей ограничений.

Следующим шагом построения корректного многочлена минимальной степени является построение многочлена минимальной степени от меньшего числа слагаемых. Рассмотрим начальный набор РО $\mathfrak{B} = \{B_k\}$, который является базисным для Z. Для него задан набор функций $\varphi^{uv}(\tilde{y})$, задающих ограничения оптимизационной задачи. Необходимо найти такой базисный поднабор $\mathfrak{B}^* \subseteq \mathfrak{B}$, для которого решение задачи $R\,(\mathfrak{B}^*)$ даёт полином наименьшей степени $F\,(\mathfrak{B}^*)$, корректный для задачи Z.

Будем говорить, что набор $\mathfrak{B}' \subseteq \mathfrak{B}$ с соответствующим набором функций $\varphi'^{uv}(\tilde{y})$ имеет тип 1, если для некоторой пары $(u, v) \in M_1$ выполняется $\varphi'^{uv}(\tilde{y}) = c_2$; соответственно имеет тип 0, если для некоторой пары $(u, v) \in M_0$ выполняется $\varphi'^{uv}(\tilde{y}) = c_1$. Задача перечисления базисных поднаборов набора $\mathfrak{B}$ эквивалентна задаче перечисления покрытий множества M_1 множествами $M(B_k)$, $k = 1, \ldots, n$. Можно показать, что решение задачи могут давать либо $\mathfrak{B}$, либо набор, дающий тупиковое покрытие, причем $\mathfrak{B}$ дает решение тогда и только тогда, когда имеет тип 1.

Здесь можно использовать метод уменьшения областей ограничений, аналогичный предыдущему.

Описанные алгоритмы могут быть эффективно распараллелены.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проекты №05-01-00718, №06-07-89299, №07-07-00181, и гранта Президента РФ по поддержке ведущих научных школ НШ-5833.2006.1.

Литература

[1] *Журавлев Ю. И., Исаев И. В.* Построение алгоритмов распознавания, корректных для заданной контрольной выборки // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 1979. — Т. 19, №3. — С. 726–738.

[2] *Романов М. Ю.* Об одном методе построения распознающего алгоритма в алгебре над множеством вычисления оценок // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 2007. — Т. 47, №8. — С. 1426–1430.

[3] *Рудаков К. В.* Алгебраическая теория универсальных и локальных ограничений для алгоритмов распознавания. — Дисс. докт. физ.-мат. наук, М.: ВЦ РАН, 1992.

[4] *Васильев Ф. П.* Численные методы решения экстремальных задач. — М.: Наука, 1988.

[5] *Голиков А. И., Евтушенко Ю. Г., Моллаверди Н.* Применение метода Ньютона к решению задач линейного программирования большой размерности // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 2004. — Т. 44, №9. — С. 1564–1573.

[6] *Coleman T. F., Li Y.* A Reflective Newton Method for Minimizing a Quadratic Function Subject to Bounds on some of the Variables // SIAM Journal on Optimization. — 1996. — Vol. 6, №4. — Pp. 1040–1058.