Об одном алгоритме распознавания числовых матриц

Пролубников А. В., Дудин Д. Л.
prolubnikov@univer.omsk.su
Омск, Омский государственный университет

В докладе предлагается алгоритм распознавания объектов, представляемых числовыми матрицами. В качестве примера рассматриваются растровые изображения, задаваемые матрицами, значения элементов которых соответствуют пикселям изображения. Предполагается, что некоторое изображение из числа эталонных изображений подверглось зашумлению. При этом известно, в каком интервале могло происходить изменение каждого элемента матрицы. Необходимо определить, какое эталонное изображение соответствует зашумленному изображению.

Существует множество подходов к решению данной задачи. Ниже предлагается подход, основанный на оценивании расстояний решений систем линейных уравнений с матрицами, соответствующими зашумленному изображению, от объединенных множеств решений систем линейных уравнений с интервальными матрицами, соответствующими эталонным изображениям.

Формальная постановка задачи следующая. Пусть имеется L квадратных $n \times n$-матриц A_i с элементами a_{ij}. В ходе зашумления одной из матриц — матрицы A_{i_0} — получена некоторая матрица C. Известно, что значение элемента матрицы могло быть изменено в пределах интервала $[a_{ij} - \Delta, a_{ij} + \Delta]$, $\Delta > 0$. Необходимо определить i_0.

Без ограничения общности можно считать матрицы C, A_i квадратными. В противном случае, если имеется L $m \times n$-матриц таких, что $m < n$, то к каждой матрице добавляются $n - m$ нулевых строк.

Пусть $A_i(\delta)$ — интервальная $n \times n$-матрица, с элементами, равными интервалам $[a_{ij} - \delta, a_{ij} + \delta]$, т. е. множество числовых матриц, чьи элементы принадлежат этим интервалам. Тогда $C \in A_{i_0}(\delta)$ для некоторого δ. Для системы уравнений вида $A(\delta)x = b$, где $A(\delta)$ — интервальная матрица, b — некоторый вектор из $\mathbb{R}^n$, объединенное множество решений — это множество $\mathrm{Sol}(A(\delta), b) = \bigl\{x \in \mathbb{R}^n \bigm| \exists A \in A(\delta)\colon Ax = b\bigr\}$. Рассматриваемые далее интервальные системы уравнений — системы уравнений с неинтервальной правой частью.

Изменяя δ $(0 < \delta \leqslant \Delta)$, будем оценивать расстояние от x_0 до множеств $\mathrm{Sol}(A_i(\delta), b)$, где x_0 — решение системы линейных алгебраических уравнений $Cx = b$. Если для некоторого δ выполняется $x_0 \in \mathrm{Sol}(A_j(\delta), b)$, то матрица C является зашумленной матрицей A_j. Поскольку возможна ситуация, когда имеется несколько значений j таких, что $C \in A_j(\delta)$, и в этой ситуации распознавание таким способом невозможно, в ходе итераций алгоритма будем оценивать не вхождение, а близость значения x_0 к множествам $\mathrm{Sol}(A_i(\delta), b)$ при изменении значения δ.

В общем случае задача нахождения объединенного множества решений интервальной системы линейных уравнений обладает высокой вычислительной сложностью [1]. В предлагаемом алгоритме, благодаря неинтервальности правых частей рассматриваемых интервальных систем уравнений, находится несколько точек из этих множеств (представителей множеств), с помощью которых оценивается близость x_0 к множествам $\mathrm{Sol}(A_i(\delta), b)$. При нахождении представителей множеств производится решение систем линейных алгебраических уравнений с матрицами, модифицированными до матриц со строгим диагональным преобладанием, что обеспечивает геометрическую сходимость приближенных итерационных методов нахождения решения систем линейных алгебраических уравнений к точному решению. Модифицирование матрицы A с элементами $a_{ij},\ \ i, j = 1, \ldots, n$ производится следующей заменой их диагональных элементов:

$$a_{ii} := a_{ii} + \sum_{i \neq j}^{n} a_{ij} + 1.$$

В приведенной схеме алгоритма m — число итераций алгоритма, p — число решений из $\mathrm{Sol}(A_i(\delta_k), b)$, рассматриваемого на k-й итерации алгоритма. Значение δ_k определяется на каждой итерации как $\delta_k = (\Delta/m) \times k$. $\rho(x, y)$ — расстояние между векторами x и y.

Генерирование набора $\{\widetilde{A}_i^j(\delta_k)\}_{j=1}^{p} \in A_i(\delta_k)$ может быть произведено случайным генерированием матриц с элементами в заданных $A_i(\delta_k)$ интервалах. Далее, поскольку в случае неинтервальной правой части объединенные множества решений выпуклы, соответствующие решения $\{x_{ij}^k\}$ могут быть использованы для получения представителей $\{\widetilde{x}_{ij}^k\}$, позволяющих более точно оценить расстояние до объединенных множеств решений.

Предложенный подход показал свою эффективность в ходе проведенного эксперимента с матрицами размеров до 500×500 и значениями элементов от 0 до 255. Изменение элемента матрицы (зашумление) в ходе эксперимента представляло собой равномерно распределенную случайную величину, принимающую значения в диапазоне от 0 до Δ $(100 \leqslant \Delta \leqslant 255)$. Количество изменяемых элементов составляло до 80%. Позиции изменяемых элементов выбирались как в соответствии с равномерным распределением по всем позициям элементов матрицы, так и в соответствии с выбором отдельных групп элементов матрицы, подвергаемых зашумлению. Так, при подаче на вход алгорит-

Алгоритм 1. Принципиальная схема.

Вход: матрицы $A_i,\ i = 1, \dots, L,\ C$;
Выход: i_0 — номер матрицы;

инициализация: $s_i^j := 0$ для всех $i = 1, \dots, L,\ \ j = 1, \dots, m$;
найти x_0 — решение СЛАУ $Cx = b$;
для $k = 1, \dots, m$
    сгенерировать набор матриц $\{\widetilde{A}_i^j(\delta_k)\}_{j=1}^p$ для оценивания расстояния до множества $\mathrm{Sol}(A_i(\delta_k), b)$;
    решить СЛАУ $\widetilde{A}_i^j(\delta_k) = b,\ \ i = 1, \dots, L,\ \ j = 1, \dots, p$, $\{x_{ij}^k\}$ — полученные решения;
    получить представителей $\{\widetilde{x}_{ij}^k\}$;
    вычислить $\{\rho_i^k\}$: $\rho_i^k := \min\limits_{1 \leqslant j \leqslant p} \{\rho(\widetilde{x}_{ij}^k, x_0)\}$;
для $k = 1, \dots, m$
    если q таково, что $\rho_q^k = \min\limits_{1 \leqslant i \leqslant L} \{\rho_i^k\}$ **то**
        $s_q^k := s_q^k + 1$;
найти $i_0,\ k_0$ такие, что $s_{i_0}^{k_0} = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant L,\ 1 \leqslant k \leqslant m} \{s_i^k\}$;

ма изображений букв латинского алфавита и цифр в градациях серого цвета (размер изображений составлял 200×200 пикселей), алгоритм устойчиво распознавал изображения при величине равномерного шума до 60% и одновременном зашумлении до 10 круговых областей, случайно выбираемых в изображении, радиусом до 30 пикселей.

Эффективность алгоритма становится ниже при работе с мнонохромными изображениями. В этом случае при зашумлении происходит инвертирование значений элементов матрицы, тогда как представленный алгоритм использует непрерывность изменения границ множества $\mathrm{Sol}(A(\delta), b)$ при непрерывном изменении элементов A. При проведении вычислительного эксперимента с монохромными изображениями были получены следующие результаты. При наличии небольшого числа случаев, принципиально тяжелых для распознавания алгоритмом (3% от общего числа испытаний), распознавание производилось правильно при уровне равномерного шума до 35,4%, тогда как, например, алгоритм типа «Кора» и морфологический метод позволяют устойчиво распознавать изображения вплоть до шума в 42% и 45% соответственно [2].

Литература

[1] *Kreinovich V., Lakeyev A. V., Rohn J., Kahl P.* Computational Complexity and Feasibility of Data Processing and Interval Computations.— Dordrecht: Kluwer, 1997.

[2] *Дюкова Е. В., Кирнос Э. А.* Сравнение алгоритма распознавания типа «Кора» и черно-белой морфологии в задаче распознавания черно-белых изображений // Всеросс. конф. ММРО-9, Москва, 1999. — С. 178–179.