Расстояния и другие меры близости на множестве черно-белых цифровых изображений

Парфенов П. Г., Каплий И. А., Куликов О. С.
parfenov@uniyar.ac.ru
Ярославль, ЯрГУ

Строится серия функций на множестве пар черно-белых цифровых изображений, являющихся либо расстоянием, либо аналогом расстояния. Предложенные функции позволяют, с одной стороны, решать задачи различения изображений, с другой стороны, дают некую меру сходства. Рассмотрены приложения такого подхода к текстурам.

Под изображением A будем понимать матрицу $A = (a_{ij})$ размера $m \times n$ с элементами, принимающими значения либо 0, либо 1. Рассматривая матрицу $A = (a_{ij})$ как условный экран и следуя подходу работы [5], введем возможными традиционными способами экранные расстояния между парами пикселов:

$$r_1(a_{ij}, a_{kl}) = \sqrt{(k-i)^2 + (l-j)^2};$$
$$r_2(a_{ij}, a_{kl}) = |k-i| + |l-j|\,;$$
$$r_3(a_{ij}, a_{kl}) = \max\bigl\{|k-i|\,, |l-j|\bigr\}.$$

Классическим расстоянием между компактными подмножествами метрического пространства является расстояние Хаусдорфа [1, 2, 5]. Используя соответствующие экранные расстояния $r_p(a_{ij}, a_{kl})$, $p = 1, 2, 3$, стандартным образом определим аналоги расстояния Хаусдорфа на условном экране между изображениями A и B, для $p = 1, 2, 3$:

$$h_p(A, B) = \max\bigl\{\max\{r_p(a_{ij}, B)\colon a_{ij} = 1\}, \max\{r_p(A, b_{kl})\colon b_{kl} = 1\}\bigr\}.$$

Расстояния h_p, $p = 1, 2, 3$, не характеризуют различие или сходство форм изображений A и B, так как зависят от их взаимного расположения на условном экране. Обозначим через T некоторый класс преобразований изображений, сохраняющих их форму и, естественно, не выводящих изображения за пределы условного экрана. Как представлется, величины $H_p(A, B) = \min\{h_p(\tau(A), B)\colon \tau \in T\}$, характеризуют различия или близость форм изображений A и B. В работах [3, 4] было введено понятие характеристического набора коэффициентов черно-белого цифрового изображения. Для любого такого изображения A строится шестнадцатимерный набор неотрицательных целочисленных коэффициентов $K(A) = \{k_t(A) : t = 0, 1, 2, \ldots, 15\}$, где $k_t(A)$ указывает число фрагментов, размера 2×2, изображения A. Фрагментом, размера 2×2, изображения A назовем любую подматрицу матрицы A, состоящую из элементов $a_{ij}, a_{i+1j}, a_{ij+1}, a_{i+1j+1}$, которые могут принимать значения 0 или 1.

Очевидно, что всего существует 16 различных фрагментов. Естественным образом можно определить расстояния на множестве таких наборов для изображений A и B:

$$\rho_1(A,B) = \sqrt{\sum_{t=0}^{15}(k_t(A)-k_t(B))^2};$$
$$\rho_2(A,B) = \sum_{t=0}^{15}\left|k_t(A)-k_t(B)\right|;$$
$$\rho_3(A,B) = \max\bigl\{\left|k_t(A)-k_t(B)\right| : t=0,1,2,\ldots,15\bigr\}.$$

Введенные таким образом функции ρ_p в значительной степени и характеризует различия изображений, но в строгом смысле не является расстоянием между изображениями, так как существуют примеры двух различных изображений A и B, для которых характеристические наборы $K(A)$ и $K(B)$ совпадают.

Но если меру близости ρ_p легко вычислить для любой пары изображений, то вычисление расстояний на основе расстояния Хаусдорфа представляет трудности для текстур, так как множество преобразований T может оказаться пустым в силу того, что любой сдвиг текстуры будет выводить текстуру за пределы условного экрана. Поэтому предлагается сравнивать текстуры, разбивая их на некие блоки W_q; в данном случае текстуры разбиваются на четверти, $q = 1,2,3,4$.

Рассмотрим теперь в качестве T множество целочисленных сдвигов изображений $\tau = (\tau_1, \tau_2) \in T$, где $\tau_1, \tau_2 \in Z$. Дополнительно введем еще изображения $\tau W_q = \{a_{i+\tau_1 j+\tau_2} = a_{ij}\}$, $q = 1,2,3,4$, и положим вне этого блока значения пикселов равными нулю. Безусловным требованием является то, что изображения τW_q не выводятся за пределы условного экрана. Определим еще изображение B_q^τ, совпадающее с B_q на всех пикселах из блока τW_q, и положим вне этого блока значения пикселов равными нулю. Тогда определим расстояния $h_p(\tau W_q, B_q^\tau)$, $q = 1,2,3,4$, $p = 1,2,3$.

Вычислим, соответственно, величины

$$M_p^q(A,B) = \min\left\{h_p(\tau W_q, B_q^\tau)\colon \tau \in T\right\}.$$

Определим теперь для текстур A и B расстояния:

$$R_p(A,B) = \max\left\{M_p^q(A,B)\colon q = 1,2,3,4\right\}.$$

Ниже приведены некоторые характерные результаты численных экспериментов для изображений, приведенных на Рис. 1 и Рис. 2, представленных на экране 50×50 пикселов.

Рисунок 1, изображения букв (1,2):

Рис. 1. Изображения букв

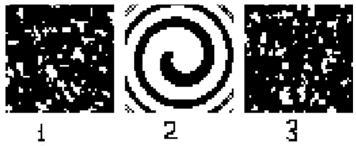

Рис. 2. Текстуры

$\rho_1(A,B) = 239.4 \quad \rho_2(A,B) = 432 \quad \rho_3(A,B) = 183$
$H_1(A,B) = 22.2 \quad H_2(A,B) = 31 \quad H_3(A,B) = 24$

Рисунок 1, изображения букв (1,3):

$\rho_1(A,A') = 80.2 \quad \rho_2(A,A') = 138 \quad \rho_3(A,A') = 67$
$H_1(A,A') = 16.4 \quad H_2(A,A') = 22 \quad H_3(A,A') = 24$

Рисунок 2, текстуры (1,3):

$\rho_1(1,3) = 80.2 \quad \rho_2(1,3) = 2060 \quad \rho_3(1,3) = 1030$
$R_1(1,3) = 2.8 \quad R_2(1,3) = 3 \quad R_3(1,3) = 2$

Рисунок 2, текстуры (1,2):

$\rho_1(1,2) = 80.2 \quad \rho_2(1,2) = 2418 \quad \rho_3(1,2) = 1093$
$R_1(1,2) = 7.8 \quad R_2(1,2) = 9 \quad R_3(1,2) = 6$

Полученные результаты, как представляется, показывают хорошее согласование введённых в настоящей работе мер близости ρ_p, $p = 1, 2, 3$, и расстояний, построенных на основе классической метрики Хаусдорфа. Трудоемкость вычисления этих мер близости существенно меньше трудоемкости вычисления для метрик классического типа.

Литература

[1] *Куратовский К.* Топология. — кн. 1, 2 — Москва: Мир, 1966, 1982.

[2] *Келли, Дж.* Общая топология. — Москва: Наука, 1968. — 178 с.

[3] *Кроновер Р. М.* Фракталы и хаос в динамических системах. — Москва: Техносфера, 2006. — 69 с.

[4] *Парфенов П. Г.* О некоторых свойствах характеристического набора коэффициентов черно-белого цифрового изображения // Моделирование и анализ информационных систем. — 2005. — Т. 12, №1. — С. 52–54.

[5] *Парфенов П. Г.,Назарычев С. Л.* Об одном подходе к различению элементов из больших совокупностей традионных систем символов // Моделирование и анализ информационных систем. — 2005. — Т. 13, №1. — С. 46–48.