

Применение методов распознавания образов к исследованию динамических систем

Неймарк Ю. И.

neymark@pmk.unn.ru

Нижний Новгород, НИИПМК ННГУ

Решение и исследование решений систем дифференциальных уравнений — одна из основных задач, возникающих в самых разнообразных приложениях и науке. Вместе с тем, исследование сколько-нибудь сложной многомерной динамической системы, описываемой обыкновенными дифференциальными уравнениями, до появления компьютеров было неразрешимой задачей, а сегодня стало возможным, но требует квалифицированной, длительной и трудоемкой работы. Подчас время и трудности исследования настолько велики, что исследование практически невыполнимо, прежде всего, в силу «проклятия размерности» как фазового пространства, так и пространства параметров. В наших работах была высказана идея автоматизации огрублённого численного исследования динамической системы на основе использования методов распознавания образов и статистического моделирования. При этом образы — это фазовые траектории, установившиеся движения и их области притяжения, а статистический подход позволяет преодолеть проклятие размерности, поскольку при этом объем необходимых вычислений мало зависит от размерности. Ниже рассказывается, что удалось осуществить на этом пути.

Постановка задачи

Прежде всего, ясно, что, несмотря на теоретическую возможность бесконечного размера фазового пространства, численное исследование осуществимо только в конечной его области. Эта конечная область должна быть указана исходя из реальной задачи. Далее в ней может быть выделена часть, которую фазовые траектории не покидают. Следующий этап состоит в алгоритмизации численного отыскания и описания установившихся движений: устойчивых равновесий, периодических движений и притягивающих, в целом неустойчивых, хаотических движений. Затем находятся их области притяжения, точнее, их некоторые части, прилегающие к соответствующему установившемуся движению. При этом в отношении областей притяжения может быть указана статистическая достоверность полученных результатов. Эти вероятности с ростом используемого времени численных расчетов приближаются к единице. Исследование не встречает затруднений, если исследуемая система достаточно грубая (под грубостью имеется в виду грубость отыскиваемой упрощенной структуры фазового пространства динамической системы).

Основные этапы исследования конкретной динамической системы методами распознавания образов

Численное исследование конкретной динамической системы состоит в построении огрубленного компьютерного фазового портрета и сводится к последовательному решению целого ряда задач анализа и распознавания данных, главными из которых являются распознавание фазовых траекторий и установившихся движений (аттракторов), а также определение областей притяжения для каждого из аттракторов. Основные подходы к решению этих задач базируются на исследовании одномерных временных рядов, синдромальном анализе данных и использовании универсальной рекуррентной формы метода наименьших квадратов — методов, обладающих широкими адаптивными возможностями по отношению к изменяющейся исследуемой выборке данных, что позволяет решать задачи распознавания с активным экспериментом. Ограничимся кратким описанием путей решения каждой из поставленных задач с помощью одного из предложенных методов.

Распознавание фазовых траекторий и установившихся движений на базе одномерных временных рядов

В результате исследований была установлена возможность решения этой задачи на множестве признаков, описывающих поведение двух одномерных временных рядов $y_1(t)$ и $y_2(t)$, которые ставятся в соответствие каждой траектории $x(t)$: ряд $y_1(t)$ описывает поведение траектории при приближении её к аттрактору, и представляет собой изменение со временем расстояний между её соседними точками в некоторой заданной метрике, а ряд $y_2(t)$ описывает устойчивость исследуемой траектории, и представляет собой изменение со временем расстояний между двумя траекториями с начальными условиями из малой окрестности друг друга.

Решающее правило для распознавания типа фазовых траекторий приведено в наших работах. Оно позволяет определять траектории, стремящиеся к состоянию равновесия; траектории, стремящиеся к предельному циклу; траектории, представляющие хаотические или стохастические аттракторы. Кроме того, существуют признаки для определения типа состояния равновесия (узел, фокус), признаки наличия многообразия состояний равновесия или седловых точек, признаки дискриминации различного вида хаотических движений и др. Анализ траекторий с помощью одномерных временных рядов полностью алгоритмизирован и может быть проведен в автоматическом режиме вплоть до принятия решения о необходимости пополнения существующей базы знаний для

анализа результатов в некоторой определенной области фазового пространства.

Поиск областей притяжения с использованием синдромов

Для получения областей притяжения аттракторов эффективным инструментом являются два алгоритма на основе абсолютных синдромов — n -мерных параллелепипедов, внутри и на поверхности которых располагаются объекты какого-то одного и только этого класса. Первый алгоритм эффективно уменьшает объем обучающей выборки каждого из выделенных аттракторов практически без потери информации (в единицы, десятки, сотни раз, в зависимости от типа аттрактора) и формирует выборку для построения разделяющего решающего правила областей притяжения аттракторов на основе оптимальных синдромов. Второй алгоритм строит упомянутое разделяющее правило на основе выборки, сформированной первым алгоритмом. В некоторых случаях из-за сложности границ областей притяжения решающее правило может содержать достаточно большое число синдромов. Однако всегда можно ограничиться небольшим числом наиболее представительных синдромов для каждого из выделенных аттракторов. Такое описание области притяжения делает его доступным для понимания исследователем.

Заключение

Изложенные методы использовались для исследования конкретных математических моделей как известных, так и новых задач, среди которых четырехмерная модель с 14 параметрами, описывающая динамику ответной реакции организма на вторжение инфекции, семимерная дискретная модель турбулентности, известная система Лоренца и др. Естественным продолжением описанного исследования является изучение бифуркаций в виде одномерных и двумерных бифуркационных портретов.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 05-01-00391.