Анализ фазовых траекторий многомерных динамических систем методами распознавания на основе одномерных временных рядов

Неймарк Ю. И., Теклина Л. Г.
neymark@pmk.unn.runnet.ru
Нижний Новгород, НИИ прикладной математики и кибернетики
Нижегородского государственного университета

Качественное исследование динамических систем, заданных системами дифференциальных уравнений достаточно высокого порядка — это, на первый взгляд, чисто научная математическая проблема, но с выходом на аналитические и числовые результаты, имеющие большое практическое значение для физики и техники. В настоящее время исследование конкретной динамической системы порядка $n \geqslant 3$ весьма трудоемко, требует нестандартного подхода и основывается на интуиции исследователя и анализе особенностей рассматриваемой системы. Для формализации, а, в конечном счете, и автоматизации процесса исследования динамических систем, предлагается новый подход, основанный на решении задачи построения фазового портрета динамической системы методами распознавания образов путем извлечения знаний из рассмотрения фактических данных, получаемых в ходе активного эксперимента. Этот подход представлен в работе [1], а в настоящем докладе рассматриваются возможности его реализации с помощью адаптивных методов анализа, описания и распознавания динамически изменяющихся объектов на основе универсальной рекуррентной формы метода наименьших квадратов [2].

Цели и задачи анализа

Решение проблемы исследования динамических систем методами распознавания требует решения задачи распознавания различных типов фазовых траекторий. Для диссипативных систем это: траектории, стремящиеся к состоянию равновесия, траектории, стремящиеся к предельному циклу, и хаотические и стохастические движения. Для сведения задачи определения вида фазовой траектории к классической задаче распознавания с учителем путем формирования единого пространства информативных признаков, описывающих поведение траектории любой длительности в фазовом пространстве любой размерности, и был проведен анализ различного типа фазовых траекторий для разных и по своей природе, и по размерности динамических систем. Обучающая выборка $\mathbf{X}$ состояла из отрезков фазовых траекторий — кривых, представляющих собой решение нескольких многомерных систем дифференциальных уравнений разного порядка при различных начальных условиях, и заданных значениями своих координат в фазовом пространстве в последовательные моменты времени с постоянным для данной кривой шагом дискретизации Δt. Таким образом, обучающая выборка представляла собой множество конечных многомерных временных рядов разной размерности и длительности: $\mathbf{X} = \{\mathbf{x}^1, \ldots, \mathbf{x}^N\}$, где $\mathbf{x}^i = (x^i_{j1}, \ldots, x^i_{jn_i})$, $j = 1, \ldots, M_i$, n_i — размерность i-ой траектории, M_i — длина соответствующего ей временного ряда.

Проведенный анализ включал в себя:

— определение длительности переходного периода до попадания траектории в зону аттрактора;
— описание особенностей поведения фазовой траектории как многомерного временного ряда при приближении к аттрактору;
— исследование устойчивости фазовых траекторий;
— описание области локализации траектории в фазовом пространстве при приближении ее к аттрактору.

Распознавание вида фазовых траекторий

В результате исследований была установлена возможность решения задачи распознавания различных типов фазовых траекторий на множестве признаков, описывающих поведение одномерных временных рядов, представляющих собой изменение со временем расстояний между соседними точками исходного временного ряда:

$$\mathbf{X} = \{\mathbf{x}^1, \ldots, \mathbf{x}^N\} \Rightarrow \mathbf{Y} = \{\mathbf{y}^1, \ldots, \mathbf{y}^N\},$$

где $\mathbf{y}^\nu = (y^\nu_1, \ldots, y^\nu_{M_\nu - 1})$ и $y^\nu_l = \sqrt{\sum_{j=1}^{n_\nu} \left(x^\nu_{lj} - x^\nu_{l+1,j}\right)^2}$.

После перехода от многомерного временного ряда $\mathbf{x}$ к одномерному временному ряду $\mathbf{y}$ была решена первая из всего множества задач, а именно — проблема предварительного (грубого) определения длительности переходного периода t^*, когда при $t < t^*$ временной ряд изменяется произвольно, а при $t > t^*$ характеристики ряда (среднее, дисперсия, коэффициенты авторегрессии и др.) приобретают четкие специфические свойства, что, предположительно, свидетельствует о том, что траектория попадает в зону аттрактора. В дальнейшем при расширении знаний об исследуемой системе эта величина при необходимости корректируется.

После определения t^* для $\mathbf{x}(t)$ при $t > t^*$ строятся два одномерных временных ряда $\mathbf{y}_1(t)$ (для описания поведения траекторий при приближении их к аттрактору) и $\mathbf{y}_2(t)$ (для исследования на устойчивость), где $\mathbf{y}_1(t)$ — это ряд $\mathbf{y}(t)$ при $t > t^*$, а $\mathbf{y}_2(t) = |\mathbf{x}(t) - \tilde{\mathbf{x}}(t)|$, где $\tilde{\mathbf{x}}(t)$ — траектория с начальными условиями из малой окрестности траектории $\mathbf{x}(t)$ при $t = t^*$.

Результатом анализа методами распознавания расширенной обучающей выборки, в которой каждая траектория $\mathbf{x}^i(t)$ описывалась двумя соответствующими ей одномерными временными рядами $\mathbf{y}_1^i(t)$ и $\mathbf{y}_2^i(t)$, стало выделение ряда признаков, информативных для решения задачи дискриминации различных типов траекторий, а именно:

1. Поведение ряда $\mathbf{y}_1(t)$ при $t \to \infty$.
2. Периодичность ряда $\mathbf{y}_1(t)$. Исследование на периодичность и отыскание периода проводится путем скольжения отрезка ряда $\mathbf{y}_0$ длительности τ по ряду $\mathbf{y}_1(t)$ с определением степени близости $\delta(t) = \sum_{j=0}^{\tau/\Delta t} \bigl(\mathbf{y}_1(t + j\Delta t) - \mathbf{y}_0(j\Delta t)\bigr)^2$ при различных значениях t.
3. Поведение ряда $\mathbf{y}_2(t)$ при $t \to \infty$.

На базе этих признаков построено решающее правило для распознавания типа фазовых траекторий:

1. Траектория стремится к состоянию равновесия, если $\lim\limits_{t\to\infty} \mathbf{y}_1(t) = 0$ и $\lim\limits_{t\to\infty} \mathbf{y}_2(t) = 0$. Причем по характеру изменения $\mathbf{y}_1(t)$ можно определить тип состояния равновесия: в узле, начиная с некоторого t, $\mathbf{y}_1(t)$ монотонно убывает, а в фокусе $\mathbf{y}_1(t)$ совершает колебательные движения с уменьшающейся амплитудой.
2. Если $\lim\limits_{t\to\infty} \mathbf{y}_1(t) = 0$, но $\lim\limits_{t\to\infty} \mathbf{y}_2(t) = A \neq 0$, причем величина A зависит от расстояния $|\mathbf{x}(t^*) - \tilde{\mathbf{x}}(t^*)|$ (начальные условия для $\tilde{\mathbf{x}}(t)$), то имеет место многообразие состояний равновесия.
3. О наличии предельного цикла свидетельствуют периодичность временного ряда $\mathbf{y}_1(t)$ и выполнение условия $\lim\limits_{t\to\infty} \mathbf{y}_2(t) = 0$.
4. Если и $\lim\limits_{t\to\infty} \mathbf{y}_1(t)$, и $\lim\limits_{t\to\infty} \mathbf{y}_2(t)$ не существуют, то траектория представляет собой хаотическое или стохастическое движение.

Приведенное правило не исчерпывает возможностей исследования фазовых траекторий с помощью одномерных временных рядов. В частности, существуют признаки наличия седловых точек, признаки дискриминации различного вида хаотических движений и др.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект №05-01-00391.

Литература

[1] *Неймарк Ю. И., Котельников И. В., Теклина Л. Г.* Исследование структуры фазового пространства динамической системы как задача распознавания образов // Докл. конф. ММРО-12. — М.: Макспресс, 2005. — С. 177–180.

[2] *Неймарк Ю. И., Теклина Л. Г.* Новые технологии применения метода наименьших квадратов. — Нижний Новгород: Изд. Нижегородского госуниверситета, 2003. — 196 с.