Сокращение размерности пространства спектральных признаков в многоклассовой задаче распознавания сигналов

Манило Л. А., Немирко А. П.
APNemirko@mail.eltech.ru
Санкт-Петербург, Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ»

Распознавание сигналов в частотной области, как правило, основано на анализе спектральных признаков, получаемых при вычислении функции спектральной плотности мощности (СПМ). Это описание достаточно полно отражает частотные свойства представленных групп сигналов, но приводит к необходимости построения дискриминантных функций в пространстве большой размерности. Снизить размерность признакового пространства можно путем формирования упорядоченного набора признаков на основе группировки спектральных коэффициентов, а также отображения полученного описания в пространство меньшей размерности с применением множественного дискриминантного анализа. Основой для построения решающих функций является анализ линейного дискриминанта Фишера J, максимизация которого приводит к выбору наилучшего для разделения c классов сигналов набора $(c-1)$ векторов [1]. Однако не всегда его оптимизация обеспечивает надежное распознавание сигналов.

Критерий J, оценивающий степень разделения исходных классов сигналов, можно представить скалярной величиной, задаваемой следом матрицы в виде:

$$J = \mathrm{tr}(\mathbf{S}_2^{-1}\mathbf{S}_1), \qquad (1)$$

где $\mathbf{S}_1$ — матрица рассеяния между классами; $\mathbf{S}_2$ — обобщенная матрица рассеяния внутри классов.

В случае c классов проекции объектов при переходе из L-мерного пространства сформированных спектральных признаков $\mathbf{G} = (G_1, G_2, \ldots, G_L)^{\mathrm{т}}$ в $(c-1)$-мерное пространство могут быть найдены с помощью матричного преобразования $\mathbf{Y} = \mathbf{W}^{\mathrm{т}}\mathbf{G}$, где $\mathbf{W}$ — матрица размера $L \times (c-1)$, нахождение которой сопряжено с максимизацией J. Недостаток применения выражения (1) связан с тем, что при увеличении числа классов J становится индикатором больших межгрупповых расстояний и слабо отражает взаимное расположение близко расположенных в частотной области классов.

Оптимизация построения решающих правил

Оптимизировать процедуру построения решающих правил можно путем сведения ее к набору задач попарной классификации с введением весовых коэффициентов $a_{i,j}$, усиливающих влияние на критерий J близко расположенных классов. В этом случае обобщенное выражение для критерия J принимает вид:

$$J = \sum_{i=1}^{c-1} \sum_{j=i+1}^{c} n_i n_j a_{i,j} \ \operatorname{tr} \left(\left(\mathbf{W}^T \mathbf{S}_2 \mathbf{W} \right)^{-1} \left(\mathbf{W}^T \mathbf{S}_1^{(i,j)} \mathbf{W} \right) \right), \qquad (2)$$

где n_i и n_j — частота появления объектов, образующих классы ω_i и ω_j.

Весовую функцию $a_{i,j}$ можно связать с ценой ошибки распознавания каждой пары классов ω_i и ω_j. В работе [2] предлагается использовать веса в виде некоторого представления функции ошибок $\operatorname{erf}\left(\frac{\eta-t}{\sigma}\right)$, где t — граница решающего правила, а η и σ — параметры распределений, вычисляемые для заданных групп объектов, исходя из предположений о нормальном законе распределений с равными ковариационными матрицами. Этот подход представляется эффективным, поскольку критерий J может быть приближен к оценке достоверности распознавания объектов путем суммирования вероятностей правильного решения при попарной классификации. В данной работе развивается идея приближения критерия J к оценке точности классификации объектов в пространстве спектральных признаков, представленных нормированными значениями СПМ. Задачу нахождения $a_{i,j}$ в (2) предлагается решить следующим образом.

Метод вычисления весовых функций

Рассмотрим в двумерном пространстве (x_1, x_2) два класса объектов ω_i и ω_j с нормальным законом распределения и единичными матрицами ковариации. Если расстояние между центрами этих классов обозначить как $\Delta_{i,j} = \|\mathbf{m}_i - \mathbf{m}_j\|$, где $\mathbf{m}_i$ и $\mathbf{m}_j$ — векторы средних значений, то, проецируя эти классы на новое направление $\mathbf{V}$, расстояние между ними будет изменяться в зависимости от угла α между направлением, соединяющим центры классов, и вектором $\mathbf{V}$. Эту зависимость можно представить как $\Delta_{i,j}^{(\nu)} = \Delta_{i,j} \cos\alpha$. При равных априорных вероятностях появления объектов обоих классов вероятность правильного распознавания определится в виде:

$$\gamma_{i,j} = \frac{1}{2} + \gamma_{i,j}^{'} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{erf}\left(\frac{\Delta_{i,j}^{(\nu)}}{2\sqrt{2}} \right),$$

где $\operatorname{erf}(\cdot)$ — функция ошибок.

Тогда для случая c классов с идентичными распределениями критерий $J^{(\gamma)}$, оценивающий среднюю точность распознавания, можно представить в виде:

$$J^{(\gamma)} = \sum_{i=1}^{c-1} \sum_{j=i+1}^{c} n_i n_j \gamma_{i,j}, \tag{3}$$

а критерий J, оценивающий степень расхождения классов, примет вид:

$$J = \sum_{i=1}^{c-1} \sum_{j=i+1}^{c} n_i n_j a_{i,j} \operatorname{tr}\bigl(\mathbf{V}^T \mathbf{S}_1^{(i,j)} \mathbf{V}\bigr). \tag{4}$$

Сравнивая (3) и (4), можно предложить аппроксимацию переменной составляющей $J^{(\gamma)}$ выражением, используемым для нахождения J (4), задав веса $a_{i,j}$ в виде:

$$a_{i,j} = \frac{\gamma'_{i,j}}{tr\left(\mathbf{V}^T \mathbf{S}_1^{(i,j)} \mathbf{V}\right)}$$

для случая наилучшего взаимного расположения двух классов (ω_i, ω_j), что соответствует случаю совпадения направлений векторов $\mathbf{V}$ и $\mathbf{m}_{i,j} = (\mathbf{m}_i - \mathbf{m}_j)$. При этом $\alpha = 0$; $\operatorname{tr}\bigl(\mathbf{V}^T \mathbf{S}_1^{(i,j)} \mathbf{V}\bigr) = (\Delta_{i,j})^2$, а параметр $a_{i,j}$ в области малых значений $\Delta_{i,j}$, используя приближение функции ошибок полиномиальной функцией, можно задать в виде:

$$a_{i,j} \approx \frac{1}{8\sqrt{\pi} x_{i,j}} \left(1 - \frac{x_{i,j}^2}{3} + \frac{x_{i,j}^4}{2!\,5}\right), \tag{5}$$

где $x_{i,j} = \left(\dfrac{\Delta_{i,j}}{2\sqrt{2}}\right)$, $\Delta_{i,j} \leqslant \sqrt{2}$, $x_{i,j} \leqslant 0,5$.

Этот способ нахождения весовых функций $a_{i,j} = a(\Delta_{i,j})$ можно применить и для многоклассовой задачи, исходя из предположения, что каждый из c классов имеет матрицу внутригруппового рассеяния, задаваемую обобщенной матрицей разброса $\mathbf{S}_2 = \sum_{i=1}^{c} n_i \Sigma_i$, где Σ_i — выборочная ковариационная матрица i-го класса. Тогда для каждой пары классов в исходном L-мерном пространстве спектральных признаков необходимо найти евклидово расстояние между центрами соответствующих классов и определить веса $a_{i,j}$, используя выражение (5). Максимизация критерия (2) приводит к процедуре нахождения собственных векторов и анализу распределений групп объектов в пространстве признаков пониженной размерности.

Применение для распознавания опасных аритмий

Эффективность введения весовых функций (5) оценивалась по результатам экспериментов, выполненных на реальных электрокардиосигналах (ЭКС). Решалась задача распознавания 3-х классов опасных аритмий. В качестве исходного описания объектов, представленных фрагментами ЭКС длительностью 2 с, использован упорядоченный набор 28 спектральных признаков, полученных в частотной области, ограниченной 15 Гц, с применением перекрывающихся сегментов [3]. Некоррелированные оценки СПМ получены с шагом $\Delta f = 0,976$ Гц, но при этом шаг по частотной оси выбран вдвое меньше этой величины и составлял 0,488 Гц. В этом случае удается сохранить особенности формы спектра анализируемых сигналов при относительной устойчивости получаемых оценок СПМ. В ходе экспериментов были построены разделяющие функции, определены границы областей решений и найдены ошибки классификации, являющиеся критерием надежности распознавания. Как показал результат линейного дискриминантного анализа, в этом случае средняя ошибка классификации может быть уменьшена с 8,2% до 4,6%, что является показателем эффективности применения этой процедуры оптимизации.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проекты № 06-01-00546, № 07-01-00569.

Литература

[1] *Дуда З., Харт П.* Распознавание образов и анализ сцен: Пер. с англ. М.: Мир, 1976. — 511 с.

[2] *Loog M., Duin R. P. W., Haeb-Umbach R.* Multiclass Linear Dimension Reduction by Weighted Pairwise Fisher Criteria // IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence. — 2001. — Vol. 23, № 7. — Pp. 762–766.

[3] *Манило Л. А.* Упорядочение спектральных признаков по эмпирическим оценкам межгруппового расстояния в задачах классификации биосигналов // Изв. вузов России. Радиоэлектроника. — 2006. — Вып. 3, — С. 20–29.