Вычислительная и аппроксимационная сложность задачи о комитетной отделимости конечных множеств

Хачай М. Ю.
mkhachay@imm.uran.ru
Екатеринбург, Институт математики и механики УрО РАН

В работах [1, 2] исследована вычислительная сложность задачи MASC о минимальном аффинном разделяющем комитете для конечных множеств $A, B \subset \mathbb{Q}^n$. В частности, показано, что эта задача NP-трудна и не принадлежит классу Apx (если $P \neq NP$). В сообщении приведена оценка порога эффективной аппроксимируемости задачи MASC. Отдельно исследуется вопрос о вычислительной сложности задачи при дополнительных ограничениях, например, фиксированной размерности пространства. Показывается, что задача о комитетной отделимости остается труднорешаемой, даже будучи заданной на плоскости (т. е. в наиболее простом нетривиальном случае).

Формулировка задачи

Определение 1. *Конечная последовательность функций*

$$Q = (f_1, \dots, f_q), \quad f_i(x) = \alpha_i^T x - \beta_i,$$

называется аффинным комитетом, разделяющим множества $A, B \subset \mathbb{R}^n$, если выполнено условие

$$\begin{aligned} \bigl|\{i \in \mathbb{N}_q \mid f_i(a) > 0\}\bigr| > \tfrac{q}{2}, \quad a \in A;\\ \bigl|\{i \in \mathbb{N}_q \mid f_i(b) < 0\}\bigr| > \tfrac{q}{2}, \quad b \in B. \end{aligned}$$

Число q называется числом элементов (членов) комитета Q.

Задача о минимальном аффинном разделяющем комитете (MASC). Заданы множества $A = \{a_1, \dots, a_{m_1}\}$ и $B = \{b_1, \dots, b_{m_2}\}$, $A, B \subset \mathbb{Q}^n$. Требуется указать аффинный комитет Q с наименьшим числом элементов, разделяющий множества A и B.

Теорема 1 ([2]). *Задача MASC NP-трудна. При условии $P \neq NP$ задача MASC не принадлежит классу Apx.*

Задача MASC остается NP-трудной при дополнительном ограничении

$$A \cup B \subset \bigl\{z \in \{0, 1, 2\}^n \colon |z| \leqslant 2\bigr\}.$$

Ниже приведен новый результат, усиливающий утверждение Теоремы 1.

Теорема 2. *Справедливость условия* $NP \not\subseteq TIME(2^{\mathrm{poly}(\log n)})$ *влечет отсутствие приближенных алгоритмов для задачи MASC с точностью аппроксимации* $O(\log\log\log m)$.

Труднорешаемость задачи о комитетной отделимости на плоскости

Остановимся на важном частном случае задачи о комитетной отделимости при дополнительном условии фиксированности размерности n пространства признаков. Известно [3], что задача о минимальном аффинном разделяющем комитете, заданная в одномерном пространстве, полиномиально разрешима. Ниже показано, что при $n = 2$ (следовательно, и при произвольном фиксированном $n > 1$) она NP-трудна.

Определение 2. *Множество прямых*

$$\mathcal{L} = \{l_1, \ldots, l_s\}, \quad l_j = \left\{x \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; c_j^T x = d_j\right\},$$

называется покрытием множества $P = \{p_1, \ldots, p_k\} \subset \mathbb{R}^2$, *если для каждой точки* $p \in P$ *найдется прямая* $l = l(p) \in \mathcal{L}$ *такая, что* $p \in l$.

Как обычно, перейдем к рассмотрению комбинаторных задач, сформулированных в виде задач распознавания свойства.

Задача о покрытии прямыми конечного множества на плоскости (PC). Заданы множество $P = \{p_1, \ldots, p_k\} \subset \mathbb{Z}^2$ и число $s \in \mathbb{N}$. Существует ли покрытие $\mathcal{L}$ множества P по мощности не превосходящее s?

Задача о комитетной отделимости конечных множеств на плоскости (PASC). Заданы множества $A = \{a_1, \ldots, a_{m_1}\}$ и $B = \{b_1, \ldots, b_{m_2}\}$, $A, B \subset \mathbb{Q}^2$, и число $t \in \mathbb{N}$. Существует ли аффинный комитет Q, разделяющий множества A и B и состоящий из не более чем t элементов?

Известно [4], что задача PC NP-полна. Задача PASC является частным случаем задачи ASC [2], полученным фиксацией размерности пространства. Легко убедиться в том, что обе задачи принадлежат классу NP. Ниже описывается полиномиальная сводимость задачи PC к задаче PASC, влекущая принадлежность последней классу NP-полных задач.

Пусть условие частной задачи PC задается множеством $P = \{p_1, \ldots, p_k\} \subset \mathbb{Z}^2$ и числом $s \in \mathbb{N}$. Вычислим $\rho = \max\{|p_i| \colon i \in \mathbb{N}_k\}$ и положим $\varepsilon = \frac{1}{6(2\rho+1)+1}$. Зафиксируем вектор σ, $|\sigma| = 1$ так, чтобы для любого $\{i, j\} \subset \mathbb{N}_k$ отрезки $[p_i - \varepsilon\sigma, p_i + \varepsilon\sigma]$ и $[p_j - \varepsilon\sigma, p_j + \varepsilon\sigma]$ не лежали на одной прямой. Сопоставим исходной задаче PC частную задачу PASC

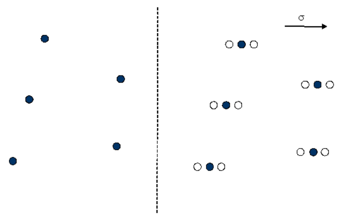

Рис. 1. Сведение задачи PC к задаче PASC.

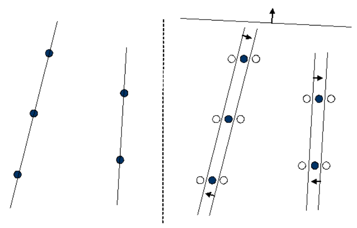

Рис. 2. Идея доказательства теоремы 3.

с условием: $A = P$, $B = (P - \varepsilon\sigma) \cup (P + \varepsilon\sigma)$ и $t = 2s + 1$ (Рис. 1). Нетрудно видеть, что описанные выше действия могут быть произведены за время, ограниченное сверху полиномом от длины записи условия задачи PC.

Теорема 3. *Множество $P = \{p_1, \ldots, p_k\} \subset \mathbb{Z}^2$ обладает покрытием из s прямых тогда и только тогда, когда множества $A = P$ и $B = (P - \varepsilon\sigma) \cup (P + \varepsilon\sigma)$ отделимы аффинным комитетом из $2s + 1$ элемента.*

Доказательство теоремы в большей степени конструктивно и представляет собой, по сути, обоснование корректности алгоритма сопоставления известному покрытию множества P аффинного комитета, разделяющего соответствующие множества A и B, иллюстрация которого приведена на Рис. 2.

Следствие 1. *Задачи PASC и ASC (в пространстве фиксированной размерности $n > 1$) NP-полны в сильном смысле.*

Следствие 2. *Задача MASC при фиксированном $n > 1$ NP-трудна в сильном смысле.*

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект №07-07-00168 и грантов Президента РФ, проекты МД-6768.2006.1 и НШ-5955.2006.1.

Литература

[1] *Хачай М. Ю.* О вычислительной сложности задачи о минимальном комитете и смежных задач // ДАН. — 2006. — Т. 406, №6. — С. 742–745.

[2] *Хачай М. Ю.* О вычислительной и аппроксимационной сложности задачи о минимальном аффинном разделяющем комитете // ТВИМ. — 2006. — №1. — С. 34–43.

[3] *Мазуров Вл. Д.* Комитеты систем неравенств и задача распознавания // Кибернетика. — 1971. — №3. — С. 140–146.

[4] *Megiddo N., Tamir A.* On the complexity of locating linear facilities in the plane // Operations Research Letters. — 1982. — Vol. 1 №5. — С. 194–197.