Математические методы и адаптивные алгоритмы эмпирического построения теоретико-возможностной модели стохастического объекта

Пытьев Ю. П.
pytyev@phys.msu.ru
Москва, МГУ им. М. В. Ломоносова, физический факультет

В докладе представлены результаты исследования проблемы эмпирического построения теоретико-возможностной модели неопределенного стохастического объекта как альтернативы его теоретико-вероятностной модели, в том числе в ситуации, когда эмпирическое построение последней принципиально невозможно.

Стохастическая модель объекта охарактеризована как вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathrm{Pr})$, в котором $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots\}$, $\mathcal{P}(\Omega)$ — класс всех подмножеств Ω, вероятности $\mathrm{pr}_i \overset{\mathrm{def}}{=} \mathrm{Pr}(\{\omega_i\}),\ i = 1, 2, \ldots,$ определяющие $\mathrm{Pr}(\cdot)\colon \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1]$, попарно различны, а в остальном — произвольны.

Рассмотрены две модели взаимно независимых наблюдений за объектом: $(\Omega^n, \mathcal{P}(\Omega^n), \mathrm{Pr}^{(n)})$, в которой $\mathrm{Pr}^{(n)} \overset{\triangle}{=} \mathrm{Pr} \times \ldots \times \mathrm{Pr}$, и $(\Omega^n,\ \mathcal{P}(\Omega^n),$ $\mathrm{Pr}^{(n)}_{1,\ldots,n})$, в которой $\mathrm{Pr}^{(n)}_{1,\ldots,n} \overset{\triangle}{=} \mathrm{Pr}_1 \times \ldots \times \mathrm{Pr}_n,\ n = 1, 2, \ldots$

Во второй модели (в отличие от первой) объект эволюционирует в процессе наблюдений, причем так, что эмпирическое построение его теоретико-вероятностной модели принципиально невозможно.

В каждой модели результатом n наблюдений являются частоты $\nu_1^{(n)}$, $\nu_2^{(n)}, \ldots$ элементарных событий $\omega_1, \omega_2, \ldots,\ n = 1, 2, \ldots$

Для обеих моделей наблюдений рассмотрены:

1. Адаптивные алгоритмы упорядочения и интервального оценивания значений $\mathrm{pr}_1, \mathrm{pr}_2, \ldots$
2. Алгоритм восстановления теоретико-возможностной модели $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega),$ $\mathrm{P})$, в которой возможность $\mathrm{P}(\cdot)\colon \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1]$ Pr_j-стохастически измерима, $j = 1, 2, \ldots,$ [1].
3. Алгоритм построения модели $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathrm{P})$ и σ-алгебры $\mathcal{A}$ подмножеств Ω, таких, что возможность P и вероятность Pr_j в известном смысле максимально согласованы на $\mathcal{A}$ между собой, $j = 1, 2, \ldots$[1].

Для первой модели наблюдений алгоритм 1 восстановления упорядоченности

$$\mathrm{pr}_{i_1} > \ldots > \mathrm{pr}_{i_s}, \tag{1}$$

верной с априори заданной вероятностью, не меньшей $1 - \alpha,\ \alpha \in (0,1)$, ра́вно как и алгоритм построения интервалов, покрывающих истинные значения $\mathrm{pr}_{i_1}, \ldots, \mathrm{pr}_{i_s}$ с вероятностью, не меньшей $1-\alpha$, для каждого $s =$

$= 2, 3, \ldots$ завершается на основе данных почти наверное (п.н.) конечного числа наблюдений.

Что касается восстановления Pr-стохастически измеримой возможности P, то, поскольку последняя при условии (1) определяется (с точностью до эквивалентности) конкретной упорядоченностью значений возможностей $\mathrm{p}_{i_1} \geqslant \ldots \geqslant \mathrm{p}_{i_s} \geqslant \ldots$ элементарных событий $\mathrm{p}_i \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{P}(\{\omega_i\})$, $i = 1, 2, \ldots$, а последняя определяется условиями Pr-измеримости[1] P:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{p}_{i_k} > \mathrm{p}_{i_{k+1}} \Longleftrightarrow f_{i_k} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{pr}_{i_1} + \ldots + \mathrm{pr}_{i_{k-1}} + 2\mathrm{pr}_{i_k} > 1;\\
&\mathrm{p}_{i_k} = \mathrm{p}_{i_{k+1}} \Longleftrightarrow f_{i_k} < 1,\ k = 1, 2, \ldots,
\end{aligned}$$

то задача восстановления P сводится к последовательности задач проверки статистических гипотез [1]

$$\{f_{i_1} > 1 \text{ или } f_{i_1} < 1\}, \ldots, \{f_{i_s} > 1 \text{ или } f_{i_s} < 1\}, \ldots \tag{2}$$

Представленный в докладе алгоритм 2 решения задач (2) при любой априори заданной вероятности безошибочной проверки любого конечного числа $s = 1, 2, \ldots$ гипотез завершается на основе данных п.н. конечного числа наблюдений.

Наконец, что касается алгоритма 3, то его актуальность обусловлена тем, что восстановленная алгоритмом 2 возможность любого непустого подмножества Ω может оказаться равной единице и, следовательно, — не отражать вероятностных отличий между событиями из $\mathcal{P}(\Omega)$. В таком случае класс $\mathcal{P}(\Omega)$ должен быть сужен до σ-алгебры $\mathcal{A}$, атомы которой содержат минимальные количества элементарных событий, но достаточно «контрастны» для того, чтобы их возможности были различны.

В докладе рассмотрен алгоритм 3. построения искомой σ-алгебры $\mathcal{A}$, который для верного с априори заданной вероятностью построения любого конечного числа атомов $\mathcal{A}$ требует почти наверное конечного числа данных наблюдений.

Все перечисленные алгоритмы позволяют восстанавливать теоретико-возможностные модели стохастических объектов, эволюционирующих в процессе наблюдений, характер возможных изменений которых ограничен лишь условиями Pr_j-измеримости, $j = 1, 2, \ldots$, восстанавливаемой возможности. Эти ограничения, равно как и требования, гарантирующие п.н. конечность числа наблюдений для завершения алгоритмов с гарантированной вероятностью безошибочных решений, рассмотрены в докладе [2].

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант № 05-01-00532-а.

[1]Вероятность Pr предполагается регулярной: $f_{i_k} \neq 1,\ k = 1, 2, \ldots$

Литература

[1] *Пытьев Ю. П.* Возможность как альтернатива вероятности. Математические и эмпирические основы, применения — М.: Физматлит, 2007.

[2] *Пытьев Ю. П.* Математические методы и алгоритмы эмпирического восстановления стохастических и нечетких моделей // IX Межд. конф. «Интеллектуальные системы и компьютерные науки», Москва — 2007.