# Экспертное оценивание нечеткого элемента

***Пытьев Ю. П.***
pytyev@phys.msu.su
Москва, МГУ им. М. В. Ломоносова, физический факультет

В докладе рассмотрена задача эмпирического построения возможности на основе заключений экспертов. Характерный момент, определяющий идею построения возможности, состоит в том, что каждый эксперт решает задачу в своей шкале, и, следовательно, метод построения возможности, учитывающий мнения всех экспертов, должен быть инвариантен относительно изотонных автоморфизмов их шкал [1].

Речь пойдет об экспертных оценках распределения нечеткого элемента $\xi$, принимающего значения в $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$, неформальная модель которого в той или иной степени известна экспертам. Эксперты должны оценить возможности равенств $\xi = x_1, \ldots, \xi = x_n$ в своих шкалах.

На самом деле каждому эксперту достаточно оценить лишь упорядоченность значений возможностей

$$\mathrm{p}_j \triangleq \mathrm{P}(\xi = x_j), \quad j = 1, \ldots$$

Пусть $\mathrm{p}_{i_1}, \mathrm{p}_{i_2}, \ldots, \mathrm{p}_{i_n}$ — упорядоченная по невозрастанию последовательность значений возможностей равенств $\xi = x_1, \ldots, \xi = x_n$, выданная $i$-м экспертом, $i = 1, \ldots, m$. Сопоставим $i$-му эксперту перестановку $\pi \triangleq (\pi_i(1), \ldots, \pi_i(n)) \triangleq (i_1, \ldots, i_n)$, упорядочивающую (по его мнению) значения возможностей

$$1 = \mathrm{p}_{i_1} \geqslant \mathrm{p}_{i_2} \geqslant \ldots \geqslant \mathrm{p}_{i_n}, \quad i = 1, \ldots, m. \tag{1}$$

Предположим, что эксперты обязаны использовать только строгое неравенство.

В таком случае расстояние $r(\pi_i, \pi_t)$ между «мнениями» $i$-го и $s$-го экспертов можно определить следующим выражением

$$r(\pi_i, \pi_t) = \left( \sum_{k=1}^{n} (\pi_i(k) - \pi_t(k))^2 \right)^{\frac{1}{2}} \tag{2}$$

Пусть в (2) $t_1, \ldots, t_n$ — номера, упорядочивающие значения возможностей, которые указал бы «эталонный» эксперт, выражая мнения всех $m$ экспертов. Тогда перестановка $\pi_t^* \triangleq (\pi_t^*(1), \ldots, \pi_t^*(n))$, отражающая в той или иной степени мнения всех $m$ экспертов, может быть определена как решение задачи

$$\sum_{i=1}^{m} r(\pi_i, \pi_t^*) = \min_{\pi(\cdot)} \sum_{i=1}^{m} r(\pi_i, \pi), \tag{3}$$

в которой минимум вычисляется на множестве всех перестановок $\pi(\cdot)\colon \{1,\ldots,n\} \to \{1,\ldots,n\}$.

Так как
$$\sum_{i=1}^{m} r^2(\pi_i,\pi) = \sum_{i=1}^{m} r^2(\pi_i,\bar\pi) + mr^2(\bar\pi,\pi), \tag{4}$$
где
$$\bar\pi(k) = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\pi_i(k), \quad k = 1,\ldots,n,$$
то задача (3) эквивалентна задаче отыскания перестановки $\pi_t^*$, ближайшей к функции[1] $\bar\pi : r^2(\bar\pi,\pi_t^*) = \min\limits_{\pi} r^2(\bar\pi,\pi)$. Если для некоторой перестановки $\hat\pi$ выполняется $\bar\pi(\hat\pi(1)) \leqslant \ldots \leqslant \bar\pi(\hat\pi(n))$, то очевидно, $\pi_t^* = \hat\pi^{-1}$.

В то время как перестановка $\pi_t^*$ выражает «коллективную» экспертизу, значение первого слагаемого в правой части равенства (4) позволяет судить, насколько ей следует доверять.

Обозначим $\omega \triangleq \{\pi_1,\ldots,\pi_m\}$ — последовательность $m$ перестановок, $\Pi^m$ — класс всех $(n!)^m$ таких $\omega$, значения $\Pr(\{\omega\}) = (n!)^{-m}$, $\omega \in \Pi^m$, определяющие вероятность на $\mathcal{P}(\Pi^m)$.

Вероятностное пространство $(\Pi^m, \mathcal{P}(\Pi^m), \Pr)$ моделирует заключения $m$ «абсолютно некомпетентных» экспертов, которые взаимно независимо принимают решения наугад.

Статистика $s(\omega) \triangleq \sum\limits_{i=1}^{m} r^2(\pi_i,\bar\pi)$, $\omega \in \Pi^m$, принимает значения в $S = \{s(\omega), \omega \in \Pi^m\} \triangleq \{s_1,\ldots,s_L\}$ с вероятностями $\mathrm{pr}_l \triangleq \Pr\bigl(\{\omega \in \Pi^m, s(\omega) = s_l\}\bigr)$, $l = 1,\ldots,L$, которые определим упорядоченными по убыванию: $\mathrm{pr}_1 \geqslant \ldots \geqslant \mathrm{pr}_L$. Если $H_0$ — гипотеза, согласно которой эксперты «абсолютно некомпетентны», то критерий, отвергающий $H_0$ ошибочно с вероятностью $\leqslant \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, определится критическим множеством $S_\varepsilon \triangleq \{s_{l(\varepsilon)}, s_{l(\varepsilon)+1},\ldots,s_L\}$, где $l(\varepsilon) = \min\{l, s_l \in S, \mathrm{pr}_l + \ldots + \mathrm{pr}_L \leqslant \varepsilon\}$.

Разумеется, на самом деле $H_0$ не обязательно свидетельствует о некомпетентности экспертов, но включение $\sum\limits_{i=1}^{m} r^2(\pi_i,\bar\pi) \in S_\varepsilon$ означает, что «коллективной» экспертизе $\pi_t^*$ доверять не следует.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант №05-01-00532-а.

## Литература

[1] *Пытьев Ю. П.* Возможность как альтернатива вероятности. Математические и эмпирические основы, применения. — М.: ФизМатЛит, 2007.

[1] $\bar\pi(1),\ldots,\bar\pi(n)$, вообще говоря, не образуют перестановку $1,\ldots,n$.