Синтез фазокодированных дискретных последовательностей системы Гаусса, образующих квазиортогональный алфавит

Леухин А. Н., Тюкаев А. Ю.
inf@marstu.mari.ru
Йошкар-Ола, ГОУ ВПО Марийский гос. тех. университет

Разработан регулярный метод синтеза алфавита квазиортогональных в широком смысле фазокодированных дискретных последовательностей с идеальными свойствами циклической автокорреляционной функции.

Введение

Особый интерес среди синтезируемых кодовых последовательностей с хорошими корреляционными характеристиками представляют фазокодированные дискретные последовательности $\mathbf{\Gamma} = \{\gamma_n\}_{0,N-1}$ (ФКП), обладающие идеальными свойствами циклической автокорреляционной функции (АКФ) т. е. нулевым уровнем боковых лепестков циклической АКФ, которую можно определить на основании выражения:

$$r_\tau = \sum_{n=0}^{N-1} \gamma_{n+\tau (\mathrm{mod}\ N)} \cdot \gamma_n^*, \quad \tau = 0, 1, \ldots, N-1, \tag{1}$$

где N — количество кодовых элементов в последовательности, γ_n^* — комплексно сопряженный кодовый элемент ФКП $\mathbf{\Gamma} = \{\gamma_n\}_{0,N-1}$, которую можно представить в следующем виде:

$$\gamma_n = \exp\left(i\varphi_n\right), \quad n = 0, 1, \ldots, N-1, \tag{2}$$

где значение фазы на каждом n-ом кодовом интервале определяется из диапазона $\varphi_n \in [0, 2\pi]$, модуль каждого кодового элемента $|\gamma_n| = 1$, N — количество кодовых элементов в ФКП, i — мнимая единица.

В работе [1] разработан метод синтеза ФКП, позволяющий получить все возможные ФКП заданной размерности N с нулевым уровнем боковых лепестков циклической АКФ. Важное прикладное значение имеют не только ФКП, обладающие идеальными свойствами циклической АКФ, но и ортогональные сигналы, т. е. такие сигналы, у которых циклическая взаимная корреляционная функция (ВКФ) равномерна и имеет нулевой уровень отсчётов. Исследования показали, что синтезированные в работе [1] ФКП с идеальными свойствами циклической АКФ могут обладать равномерной нормированной циклической ВКФ с уровнем модулей отсчётов равным $\frac{1}{\sqrt{N}}$, в том случае, если размерность N данных ФКП — нечётное число [2]. При больших значениях N такие последовательности можно считать квазиортогональными, т. к. уровень модулей отсчётов их нормированной циклической ВКФ будет стремиться к нулю, т. е.

$\lim\limits_{N\to\infty}\frac{1}{\sqrt{N}} \to 0$. Таким образом, данные дискретные последовательности образуют алфавит квазиортогональных ФКП. Поэтому актуальной является задача поиска ортогональных сигналов из общего объёма ФКП, синтезированных в работе [1].

Синтез алфавита квазиортогональных фазокодированных последовательностей системы Гаусса

Задача получения алфавита квазиортогональных ФКП заданной размерности N из общего объёма дискретных последовательностей, синтезированных в работе [1], сводится к нахождению таких ФКП $\mathbf{\Gamma}$ и $\mathbf{N}$, для которых выполняется условие:

$$|\eta_\tau| = \frac{1}{N}\left|\sum_{n=0}^{N-1}\gamma_{n+\tau\ (\mathrm{mod}\ N)}\cdot(\nu_n^*)\right| = \frac{1}{\sqrt{N}},\quad \tau=0,1,\ldots,N-1, \tag{3}$$

где $\mathbf{\Gamma}=\{\gamma_n\}_{0,N-1}$ и $\mathbf{N}=\{\nu_n\}_{0,N-1}$ — ФКП, принадлежащие одному алфавиту, N — размерность ФКП, $|\eta_\tau|$ — модуль нормированной циклической ВКФ.

На основании (2) выражение (3) можно записать в следующем виде:

$$|\eta_\tau| = \frac{1}{N}\left|\sum_{n=0}^{N-1}\exp\left(i\big(\varphi^{(j)}_{n+\tau(\mathrm{mod}\ N)}-\varphi^{(l)}_n\big)\right)\right| = \frac{1}{\sqrt{N}}, \tag{4}$$

где $\tau=0,1,\ldots,N-1$, $n=0,1,\ldots,N-1$, $\varphi_n^{(j)}$ и $\varphi_n^{(l)}$ — значения фаз ФКП $\mathbf{\Gamma}=\{\gamma_n\}_{0,N-1}$ и $\mathbf{N}=\{\nu_n\}_{0,N-1}$ соответственно.

Все возможные ФКП системы Гаусса с идеальными свойствами циклической АКФ можно представить в виде [2]:

$$\mathbf{\Gamma}^{(l)} = \left\{\exp\left(i\frac{2\pi}{N_1}\lambda_l n^2\right)\right\}_{0,N-1} \tag{5}$$

где $N_1=2N$ для $N\,(\mathrm{mod}2)\equiv 0$ и $N_1=N$ для $N\,(\mathrm{mod}2)\equiv 1$, λ_l — вычеты по модулю N, взаимно простые с N, $l=0,1,\ldots,\varphi(N)-1$, $\varphi(N)$ — функция Эйлера от числа N.

На основании (4) и (5) выражение для модуля циклической ВКФ двух ФКП системы Гаусса представим в следующем виде:

$$\begin{aligned}|\eta_\tau| &= \frac{1}{N}\left|\sum_{n=0}^{N-1}\exp\left(i\frac{2\pi}{N}\lambda_j(n+\tau)^2\right)\exp\left(-i\frac{2\pi}{N}\lambda_l n^2\right)\right| = \\ &= \frac{1}{N}\left|\sum_{n=0}^{N-1}\exp\left(i\frac{2\pi}{N}\left((\lambda_j-\lambda_l)n^2+2\lambda_j\tau n\right)\right)\right|,\end{aligned} \tag{6}$$

где λ_j и λ_l — числа, взаимно простые с N, $\tau = 0, 1, \ldots, N-1$, N — нечетное число.

Пусть $a_1 = 2\lambda_j \tau$, $a_2 = \lambda_j - \lambda_l$. При нечетном N и a_2 взаимно простом с N выполняется равенство [3]:

$$\left| \sum_{n=0}^{N-1} \exp\left(i\frac{2\pi}{N}\left[a_1 n + a_2 n^2\right]\right)\right| = \sqrt{N}. \tag{7}$$

Выражение (7) при a_2, взаимно простом с N, является полной тригонометрической суммой Гаусса $S(N)$. Для модуля суммы Гаусса выполняется равенство [3]:

$$|S(N)| = \begin{cases} \sqrt{N}, & \text{если } N \equiv 1 \pmod{2}; \\ \sqrt{2N}, & \text{если } N \equiv 0 \pmod{4}; \\ 0, & \text{если } N \equiv 2 \pmod{4}. \end{cases} \tag{8}$$

Таким образом, нормированная циклическая ВКФ двух ФКП, задаваемых с помощью выражения (5), будет квазиортогональной и равной $|\eta_\tau| = \frac{1}{\sqrt{N}}$.

Алгоритм синтеза всех возможных квазиортогональных алфавитов системы Гаусса можно представить в следующем виде:

1. Определяется система вычетов по модулю нечетного числа N, взаимно простых с N, $\left\{\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{\varphi(N)-1}\right\}$, где $\varphi(N)$ — функция Эйлера.
2. Определяется наименьшее число p_1 в разложении $\left\{\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{\varphi(N)-1}\right\}$ числа N.
3. Среди всех $C_{\varphi(N)}^{p_1-1}$ сочетаний по $p_1 - 1$ вычетов по модулю N, взаимно простых с N, из $\varphi(N)$ возможных вычетов отбираются k-ые сочетания вычетов $\left\{\lambda_0^{(k)}, \lambda_1^{(k)}, \ldots, \lambda_{p_1-2}^{(k)}\right\}$, которые удовлетворяют условию: $\lambda_j^{(k)} - \lambda_l^{(k)} \equiv 1 \pmod{N}$, $j, l = 0, 1, \ldots, p_1 - 2$, $j \neq l$.
4. Полная система ФКП заданной размерности N, образующих искомый квазиортогональный алфавит имеет вид:

$$\mathbf{\Gamma}^{(l)} = \left\{\exp\left(i\frac{2\pi}{N}\lambda_l^{(k)} n^2\right)\right\}_{0,N-1}, \tag{9}$$

где $l = 0, 1, \ldots, p_1 - 2$, $n = 0, 1, \ldots, N-1$.

Заключение

В работе предложен метод формирования алфавита квазиортогональных последовательностей системы Гаусса. Цклическая автокорреляционная функция каждого символа этого алфавита имеет нулевые боковые лепестки.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 07-07-00285 и гранта Президента РФ МД-63.2007.9.

Литература

[1] *Leukhin A.N.* Algebraic solution of the synthesis problem for coded sequences. — // Quantum Electronics. – 2005. – V.35, № 8. – p. 688 - 692 35.

[2] *Леухин А.Н., Тюкаев А.Ю., Бахтин С.А.* Синтез и анализ сложных фазокодированных последовательностей. — // Электромагнитные волны и электронные системы 2007. №4. – с. 32 – 37.

[3] *Коробов Н.М.* Тригонометрические суммы и их приложения. — М.: Наука, 1989. – 240 с.