

**Спектрально-аналитический метод вычисления  
производных от зашумленных сигналов  
и обусловленность оператора дифференцирования**

*Куликова Л. И., Панкратов А. Н., Дедус Ф. Ф.*

Kulikova@impb.ru

Пушкино, Институт математических проблем биологии РАН

Рассматривается эффективность нахождения нескольких первых производных с помощью аналитических соотношений через коэффициенты разложения исходного сигнала и мера обусловленности оператора дифференцирования для ортогональных базисов.

При вычислении производных от зашумленных сигналов, знание которых необходимо при решении целого ряда задач, возникают сложности. Существует ряд алгоритмов и программ решения данной задачи цифровыми методами, используя которые, можно получить первую производную. Но вычисление даже второй производной с требуемой точностью становится очень проблематичным. Если обрабатываемый сигнал является приближенным, задача вычисления производной может стать некорректной [1], что приводит к затруднениям при вычислении производных, то есть такая задача не обладает свойством устойчивости.

Разрабатываются новые подходы к решению некорректно поставленных задач, позволяющие строить решения, устойчивые к малым изменениям исходных данных. Имеется метод регуляризации для решения задачи дифференцирования. При рассмотрении конкретных задач, как правило, затруднительно фактически найти параметр регуляризации  $\alpha$  как такую функцию погрешности исходных данных  $\sigma$ , для которой оператор  $R(u, \alpha(\sigma))$  является регуляризирующим. В литературе описаны различные способы нахождения такого значения  $\alpha$  [2, 3].

В качестве альтернативы для решения указанной задачи предлагается применение обобщенного спектрально-аналитического метода [4], который предполагает проведение полной обработки сигналов (экспериментальных данных, изображений) в пространстве коэффициентов Фурье без промежуточного восстановления исходного представления данных [5]. С этой целью разработана математическая библиотека выводов, включающая основные математические процедуры над спектром сигнала, в том числе и аналитические соотношения для нахождения производной в пространстве коэффициентов разложения для различных ортогональных базисов. В работе показана возможность применения соотношений для вычисления нескольких первых производных от зашумленного сигнала.

Проведены исследования по анализу меры обусловленности оператора дифференцирования для семейства ортогональных базисов. Число

обусловленности требуется для оценивания погрешности вычисления коэффициентов разложения производных, и полученная оценка позволяет указать примерное число верных цифр вычисленных значений. Относительная погрешность вычисления коэффициентов разложения производной пропорциональна относительной погрешности вычисления коэффициентов разложения исходной функции, а коэффициент пропорциональности равен мере обусловленности оператора дифференцирования для данного базиса.

Показано, что оператор дифференцирования для семейств ортогональных полиномов хорошо обусловлен. Проведение адаптивных процедур при решении аналитического описания исследуемой функции, позволяющие достичь описания с требуемой точностью при минимальной глубине аппроксимации, значительно улучшает обусловленность. Операция дифференцирования в рамках предлагаемого метода устойчива.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проекты № 07-01-00564, № 06-01-08039, № 06-07-89303.

#### Литература

- [1] Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. — М: Наука, 1986. — 320 с.
- [2] Морозов В. А. Регулярные методы решения некорректно поставленных задач. — М: Наука, 1987.
- [3] Тихонов А. Н., Гончаровский А. В., Степанов В. В., Ягода А. Г. Численные методы решения некорректных задач. — М: Наука, 1990.
- [4] Дедус Ф. Ф., Махортых С. А., Устинин М. Н., Дедус А. Ф. Обобщенный спектрально-аналитический метод обработки информационных массивов. Задачи анализа изображений и распознавания образов. — М: Машиностроение, 1999. — 357 с.
- [5] Дедус Ф. Ф., Куликова Л. И., Панкратов А. Н., Тетуев Р. К. Классические ортогональные базисы в задачах аналитического описания и обработки информационных сигналов. Учебное пособие. — М: Издательский отдел ВМиК МГУ, 2004. — 147 с.