Учет двух наборов взаимно зависимой информации об относительной важности критериев в задачах многокритериального выбора

Климова О. Н.
Klimova_O@rambler.ru
Санкт-Петербург, Санкт-Петербургский Государственный Университет

Одной из значимых проблем в области многокритериального выбора является проблема сужения множества Парето, поскольку оно зачастую оказывается достаточно широким. Как правило, дальнейшее сужение области поиска наилучшего решения происходит на основе дополнительной информации, получаемой от лица, принимающего решения (ЛПР).

В данной работе рассматривается задача, в которой дополнительная информация представляет собой количественную информацию об относительной важности критериев [2]. Она заключается в том, что выделяются группы критериев и определяется важность первой группы относительно второй. Количественно важность выражается парой наборов числовых параметров. Первый набор содержит максимальные величины выигрышей по каждому из критериев более важной группы, в том случае, если ЛПР сделает уступки по каждому из критериев менее важной группы (второй набор параметров содержит величины уступок). Более того, оказывается, что вторая группа критериев, в свою очередь, важнее первой. В данной ситуации ЛПР идет на взаимные уступки по нескольким критериям, ради прибыли по каждому из них.

Информация подобного рода, т. е. когда группа критериев A важнее группы B, а группа критериев B, в свою очередь, важнее A (причем A и B непустые и взаимно непересекающиеся группы) является взаимно зависимой [2].

Пусть X — множество возможных решений. Предпочтения ЛПР выражаются при помощи набора критериев $f_1, \ldots, f_m,\ m \geqslant 2$, образующих векторный критерий $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_m(x))$, и бинарного отношения строгого предпочтения $\succ_X$, заданного на X. Множество выбираемых решений обозначим через $Sel(X)$.

Наряду с множествами X и $Sel(X)$ будем использовать множества возможных $Y = f(X) \subset R^m$ и выбираемых $Sel(Y) = f(Sel(X))$ векторов.

Дополнительная информация состоит из следующих двух сообщений: 1) группа критериев A важнее группы критериев B с заданными положительными параметрами w'_i $(\forall i \in A)$, w'_j $(\forall j \in B)$ и группа критериев B важнее группы критериев A с заданными положительными параметрами γ'_j $(\forall j \in B)$, γ'_i $(\forall i \in A)$; 2) группа A важнее группы критериев C с положительными параметрами w''_i $(\forall i \in A)$, w''_k $(\forall k \in C)$ и группа C важнее группы критериев A с положительными параметрами γ''_k $(\forall k \in C)$,

γ_i'' $(\forall i \in A)$. Группы критериев A, B, C непустые и взаимно непересекающиеся. Представленный набор информации обозначим через (И). Таким образом, в рассматриваемой задаче имеются два набора взаимно зависимой информации.

Будем предполагать, что отношение предпочтения удовлетворяет четырем аксиомам, определяющим «разумный» выбор [2].

Аксиома 1 (об исключении доминируемых векторов). Для любой пары векторов $y', y'' \in Y$, удовлетворяющих соотношению $y' \succ_Y y''$, выполнено $y'' \notin Sel(Y)$.

Аксиома 2. Для отношения $\succ_Y$ существует иррефлексивное и транзитивное продолжение $\succ$ на все пространство R^m. Тем самым, отношение $\succ_Y$ является сужением $\succ$ на Y.

Аксиома 3. Каждый из критериев $f_1, \ldots, f_m$ согласован с отношением предпочтения $\succ$.

Аксиома 4. Для любых векторов $y', y'' \in R^m$ таких, что $y' \succ y''$, для любого числа $\alpha > 0$ и произвольного вектора $c \in R^m$ выполняется $\alpha y + c \succ \alpha y'' + c$.

Учет дополнительной информации происходит в два этапа. Сначала необходимо убедиться в непротиворечивости [1] предоставленной информации, а затем по определенным формулам произвести сужение исходного множества Парето.

Критерий непротиворечивости был получен в следующем виде.

Теорема 1. *Набор информации (И) непротиворечив тогда и только тогда, когда существуют номера $i_1 \in A$ и $j \in B$, для которых выполняется неравенство*

$$\frac{w'_{i_1}}{w'_j} > \frac{\gamma'_{i_1}}{\gamma'_j} \tag{1}$$

и существуют номера $i_2 \in A$ и $k \in C$, для которых выполняется неравенство

$$\frac{w''_{i_2}}{w''_k} > \frac{\gamma''_{i_2}}{\gamma''_k}. \tag{2}$$

Учет двух наборов взаимно зависимой информации описанного вида, осуществляется по формулам, полученным в следующей теореме.

Теорема 2. *Пусть отношение предпочтения $\succ$ удовлетворяет аксиомам 1–4 и задана непротиворечивая информация об относительной важности (И), причем неравенства вида (1), (2) выполняются для всех $i \in A$, $j \in B$, $k \in C$. Тогда для множества выбираемых решений $Sel(X)$ имеют место включения*

$$Sel(X) \subset P_g(X) \subset P_f(X),$$

где $P_g(X)$ — *множество Парето в новой задаче многокритериального выбора с векторным критерием* g *размерности* $q = m - (|A| + |B| + |C|) + 4 \cdot |A| \cdot |B| \cdot |C|$ *и компонентами*

$$
\begin{aligned}
g_{ijk} &= w'_j w''_k f_i(x) + w'_i w''_k f_j(x) + w'_j w''_i f_k(x), && \forall i \in A,\ \forall j \in B,\ \forall k \in C;\\
g_{ikj} &= \gamma'_j \gamma''_k f_i(x) + \gamma'_i \gamma''_k f_j(x) + \gamma'_j \gamma''_i f_k(x), && \forall i \in A,\ \forall j \in B,\ \forall k \in C;\\
g_{jki} &= w'_j \gamma''_k f_i(x) + w'_i \gamma''_k f_j(x) + w'_j \gamma''_i f_k(x), && \forall i \in A,\ \forall j \in B,\ \forall k \in C;\\
g_{kji} &= \gamma'_j w''_k f_i(x) + \gamma'_i w''_k f_j(x) + \gamma'_j w''_i f_k(x), && \forall i \in A,\ \forall j \in B,\ \forall k \in C;\\
g_s &= f_s, && \forall s \in I \setminus (A \cup B \cup C).
\end{aligned}
$$

Таким образом, согласно теореме 2, множество Парето $P_g(X)$, полученное относительно «нового» векторного критерия g, уже множества $P_f(X)$ и является оценкой для искомого множества $Sel(X)$.

Наконец, отметим, что теорема 2 сводится к частному случаю, если дополнительная информация (И) состоит только из одного набора взаимно зависимой информации (группа критериев A важнее группы критериев B, а группа критериев B важнее группы A) [1].

Литература

[1] *Климова О. Н., Ногин В. Д.* Учет взаимно зависимой информации об относительной важности критериев в процессе принятия решений // ЖВМиМФ. — 2006.— Т. 46, №12.— С. 2178–2190.

[2] *Ногин В. Д.* Принятие решений в многокритериальной среде: количественный подход. — 2-е издание. — Москва: Физматлит, 2005. — 176 с.