Идентификация векторных полей при анализе изображений

Бакина И. Г., Голов Н. И.
irina_msu@mail.ru, golov@forecsys.ru
Москва, МГУ им. М. В. Ломоносова

В данной работе исследуется возможность описания линейными векторными полями двумерных изображений с ярко выраженной морфологической структурой: узоров папиллярных линий, радужных оболочек глаз или рельефов местности. Изображения представляются в виде набора векторов, для описания которых строится аппроксимирующее векторное поле. В данной работе векторное поле рассматривается как набор линейных векторных функций. Каждая векторная функция ищется явно, методом наименьших квадратов. В работе описывается разработанный алгоритм идентификации линейной векторной функции и исследуется устойчивость отдельных линейных векторных функций к поворотам и искажениям исходных изображений.

Представление изображения в виде набора векторов

Получение множества векторов из исходного изображения может осуществляться несколькими методами. В данной работе рассматривается построение множества векторов для дактилоскопического узора как набора направляющих векторов ветвей дискретно-непрерывного скелета.

Линейное векторное поле

Линейное векторное поле задается системой линейных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \partial x = ax + by - m; \\ \partial y = cx + dy - n; \end{cases} \tag{1}$$

и описывает следующие семейства кривых: узел, седло, фокус, центр, вырожденный узел и диакритический узел. Классификация осуществляется на основе анализа собственных значений основной матрицы системы (1).

Математическая модель линейного векторного поля задается небольшим набором параметров. Ее выбор обусловлен также: наличием в системе (1) только линейной зависимости, что позволяет применить методы линейной алгебры для идентификации и исследования модели; если $\partial x, \partial y$ рассматривать как градиент некоторой функции потенциала, то систему (1) можно рассматривать как линейную составляющую разложения функции потенциала в ряд Тейлора.

Идентификация модели линейного векторного поля

Пусть $\mathbf{P} = \{\mathbf{p_i}\}_{i=1}^{N}$ — множество исходных векторов, где $\mathbf{p_i} = \big((x_i, y_i); (\partial x_i, \partial y_i)\big)$ — вектор с координатами $(\partial x_i, \partial y_i)$ в точке (x_i, y_i), а N — общее число векторов. Введем функционал ошибки, определяющий качество аппроксимации множества векторов $\{\mathbf{p_i}\}_{i=1}^{N}$ векторным полем (1):

$$\mathrm{Err}\big(\mathbf{P}, \{a, b, c, d, m, n\}\big) = \sum_{i=1}^{N} (\partial x_i \cdot \partial y_i^{\nu} - \partial y_i \cdot \partial x_i^{\nu})^2, \tag{2}$$

где $(\partial x_i^{\nu}, \partial y_i^{\nu})$ — координаты аппроксимирующего векторного поля (1) в точке (x_i, y_i).

Введение функционала ошибки позволяет сформулировать задачу идентификации модели векторного поля как оптимизационную задачу:

$$\mathrm{Err}\big(\mathbf{P}, \{a, b, c, d, m, n\}\big) \to \min_{\{a,b,c,d,m,n\}}.$$

Результат одновременной оптимизации всех шести параметров оказался неустойчивым. Поэтому шестимерная задача была сведена к четырехмерной путем введения дополнительной информации.

Рассмотрим *опорный* вектор поля $\mathbf{p_0} = \big((x_0, y_0); (\partial x_0, \partial y_0)\big)$ и выразим параметры m и n поля через его координаты:

$$\begin{cases} m = ax_0 + by_0 - \partial x_0; \\ n = cx_0 + dy_0 - \partial y_0. \end{cases} \tag{3}$$

Опорный вектор задает смещение центра поля относительно начала координат. В работе рассмотрен выбор опорного вектора как центра тяжести системы, а также перебор по множеству исходных векторов. Подставляя (1), (3) в (2), получим квадратичный полином от четырех параметров a, b, c, d, причем все квадраты входят в него с положительными знаками. Если не рассматривать вырожденные случаи, должен присутствовать единственный глобальный экстремум — минимум, в котором все производные по переменным равны нулю. В результате имеем систему линейных алгебраических уравнений с квадратной матрицей, решая которую, получим параметры поля a, b, c, d.

Для поиска устойчивых собственных значений основной матрицы системы (1) предлагается Алгоритм 1.

Анализ отпечатков пальцев человека

Общность и устойчивость описанного выше подхода исследовались на примере задачи построения описания отпечатков пальцев человека.

Алгоритм 1. Поиск оптимальных собственных значений.

Вход: $\{\mathbf{p_i}\}_{i=1}^{N}$;
Выход: $\lambda^*_{1,2}$ — оптимальные собственные значения;
1: **для** $i = 1, \dots, N$
2: Построить аппроксимирующее векторное поле, взяв вектор $\mathbf{p_i}$ в качестве опорного;
3: Подсчитать собственные значения $\lambda^i_{1,2}$ для построенного поля;
4: Вычислить взвешенное среднее собственных значений $\lambda^*_{1,2}$:
$$\lambda^*_{1,2} = \frac{\sum_{i=1}^{N} \alpha_i \lambda^i_{1,2}}{\sum_{i=1}^{N} \alpha_i}, \text{ где } \alpha_i = \frac{1}{\mathrm{Err}(\mathbf{p_i}, \{a_i, b_i, c_i, d_i, m_i, n_i\})};$$

Под общностью понимается возможность применять описанное выше представление для описания всех возможных типов отпечатков пальцев. Под устойчивостью понимается устойчивость описания к условиям и погрешностям съемки отпечатков пальцев. Так как очевидно, что одной линейной векторной функции вида (1) недостаточно, чтобы описать все разнообразие реальных изображений отпечатков пальцев, был разработан многошаговый алгоритм построения описания, состоящего из нескольких линейный векторных функций. Алгоритм включает в себя следующие шаги:

1. Построение скелета изображения.
2. Выделение векторов на основе скелета.
3. Разбиение множества векторов на кластеры.
4. Аппроксимация каждого кластера векторным полем.

Шаг 4 выполняется на основе описанного выше алгоритма. При работе с реальными изображениями отпечатков пальцев на шаге 3 образовывался один центральный кластер, и некоторое количество вспомогательных. Линейное векторное поле центрального кластера в дальнейшем и использовалось для оценки общности и устойчивости метода.

Результаты работы метода

Результаты работы метода представлены в Таблице 1. В ней рассмотрено изменение собственных значений при трансформации отпечатков — повороты на 90°, 180° и 270° градусов. Каждый отпечаток описывался одним полем вида (1).

Работа поддержана РФФИ, проекты № 05-01-00542, № 07-07-00181.

Литература

[1] *Mestetskii L. M.* Fat curves and representation of planar figures. — Computers & Graphics, 2000 — No. 24. — Pp. 9–21.

Отпечаток	$\lambda^*_{1,2}$	Отпечаток	$\lambda^*_{1,2}$
Finger1	$0,00038 \pm 0,00373i$	Finger2	$0,00154 \pm 0,00289i$
Finger1(90^0)	$0,00037 \pm 0,00376i$	Finger2(90^0)	$0,00155 \pm 0,00287i$
Finger1(180^0)	$0,00038 \pm 0,00372i$	Finger2(180^0)	$0,00154 \pm 0,00288i$
Finger1(270^0)	$0,00037 \pm 0,00371i$	Finger2(270^0)	$0,00155 \pm 0,00284i$

Таблица 1. Результат работы метода на двух отпечатках пальцев.

[2] *Шильников Л. П., Шильников А. Л., Тураев Д. В., Чуа Л.* Методы качественной теории в нелинейной динамике, часть 1. — Институт компьютерных исследований, Москва-Ижевск, 2004.

[3] *Mumford D., Shah J.* Optimal Approximations by Piecewise Smooth Functions and Associated Variational Problems // Comm. Pure Appl. Math. — 1989. — Vol. XLII.