Матричная коррекция несовместных систем линейных алгебраических уравнений как обобщение метода наименьших квадратов

Ерохин В. И.
erohin_v_i@mail.ru
Борисоглебск, Борисоглебский гос. пед. ин-т

Рассматриваются несовместные системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) и связанные с ними специфические задачи математического программирования (задачи матричной коррекции), заключающиеся в минимальном (по некоторой матричной норме) изменении коэффициентов исследуемых СЛАУ, обеспечивающем их совместность. Анализируется устойчивость решений скорректированных систем, которая сравнивается с устойчивостью псевдорешений, полученных с помощью метода наименьших квадратов (МНК) и его модификаций, а также с помощью Тихоновской регуляризации. Указываются некоторые возможные приложения задач матричной коррекции несовместных СЛАУ в качестве инструментов параметрической идентификации линейных и линеаризуемых моделей.

Задачи матричной коррекции несовместных СЛАУ

Пусть $Ax = b$, где $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $x \in \mathbb{R}^n$ — некоторая СЛАУ, $X(A, b) \triangleq \{x \,|\, Ax = b\}$ — допустимое множество ее решений, соотношения между рангом матрицы A и ее размером — произвольные. Будем предполагать, что $X(A, b) = \varnothing$. Символом $\|\cdot\|$ будем, в зависимости от контекста, обозначать евклидову векторную или матричную норму.

Следующие две (относительно простые) задачи матричной коррекции исторически были исследованы одними из первых:

$$Z_1[1,2,3]\colon \quad \big\|[H \ \ -h]\big\| \to \inf_{X(A+H,b+h)\neq\varnothing};$$

$$Z_2[1,3]\colon \quad \|H\| \to \inf_{X(A+H,b)\neq\varnothing};$$

где $H \in \mathbb{R}^{m\times n}$ — некоторая матрица, $h \in \mathbb{R}^m$ — некоторый вектор.

Заметим, что классический МНК может быть записан в виде

$$Z_0\colon \quad \|h\| \to \inf_{X(A,b+h)\neq\varnothing},$$

а за задачей Z_1 в зарубежной литературе закрепилось название TLS (Total Least Norm — обобщенный метод наименьших квадратов).

В настоящее время усилиями отечественных и зарубежных ученых задачи Z_1 и Z_2 подверглись многочисленным усложнениям и модификациям. Указанные усложнения и модификации выразились, например, в переходе от евклидовой матричной нормы к другим, например — полиэдральным нормам [4], использованию взвешенных различными способами норм [3, 4], в переходе к коррекции несобственных задач линейного программирования (ЛП) [1, 4, 5], в появлении дополнительных ограничений в виде запрета на коррекцию некоторых строк и (или) столбцов матрицы (расширенной матрицы) исследуемой системы [3, 4] и даже в виде запрета на коррекцию произвольного множества элементов расширенной матрицы коэффициентов [4]. Получены определенные результаты для задач матричной коррекции несовместных СЛАУ, матрицы (расширенные матрицы) которых имеют специальную структуру, например, блочную [6] или структуру матриц Тёплица (Ганкеля) [7, 8].

Сравнение МНК, регуляризации Тихонова и матричной коррекции

В этом параграфе будем рассматривать переопределенные несовместные неоднородные СЛАУ. Очевидная причина такого выбора — распространенность такого рода систем в задачах обработки результатов наблюдений. Менее очевидная причина связана с условиями существования решений задач матричной коррекции [3, 4]. Под псевдорешением, полученным с помощью МНК, будем понимать нормальное псевдорешение СЛАУ $\hat{x} = A^{+}b$, где A^{+} — псевдообратная матрица (обобщенная обратная матрица Мура-Пенроуза). Под псевдорешением, полученным с помощью регуляризации Тихонова [9], будем понимать вектор $x_{\mu\delta}$, получаемый из решения задачи T относительно $A_{\mu\delta}$, $b_{\mu\delta}$, $x_{\mu\delta}$:

$$T\colon \begin{cases} \|x_{\mu\delta}\| \to \min; \\ \|A - A_{\mu\delta}\| \leqslant \mu; \quad \|b - b_{\mu\delta}\| \leqslant \delta; \quad x_{\mu\delta} \in X(A_{\mu\delta}, b_{\mu\delta}); \end{cases}$$

где $\mu \geqslant 0$, $0 \leqslant \delta < \|b\|$ — параметры, воплощающие априорную информацию о величине отклонений элементов матрицы A и вектора b от гипотетических (неизвестных) точных значений. Наконец, под псевдорешениями, получаемыми с помощью задач Z_1 и Z_2 будем понимать векторы $x_{[H^* - h^*]} \in X(A+H^*, b+h^*)$ и $x_{H^*} \in X(A+H^*, b)$, где $[H^* \ -h^*]$ — решение задачи Z_1, H^* — решение задачи Z_2.

Наиболее интересным является случай, при котором гипотетическая точная матрица СЛАУ не имеет полного столбцевого ранга, однако вследствие ошибок наблюдений, погрешностей дискретизации или погрешностей, обусловленных вычислениями в конечной разрядной сетке, предъявляемая исследователю матрица A оказывается полноранговой. Хорошо известно, что в указанных условиях классический МНК приводит к неустойчивым решениям, а метод Тихонова при использовании достоверных значений μ и δ от указанного недостатка свободен. Что касается решений, получаемых с помощью матричной коррекции, то их устойчивость при решении практических задач хорошо известна. В то же время, теоретически этот вопрос до настоящего времени был изучен очень слабо, однако автору удалось показать, что при выполнении некоторых дополнительных ограничений, и, в частности, соответствующей «малости» параметров μ и δ задачи Z_1, Z_2 и им подобные становятся эквивалентными задаче T, что позволяет теоретически обосновать устойчивость получаемых с их помощью псевдорешений.

Так, справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Если решение задачи T существует и выполняется условие $\mu < (\|b - A\hat{x}\| - \delta)/\|\hat{x}\|$, то найдется подходящая задача матричной коррекции, дающая то же псевдорешение $x_{\mu\delta}$ исследуемой СЛАУ, что и задача T. При этом, если $\bar{A}x = \bar{b}$ — гипотетическая точная совместная СЛАУ, $\bar{x}$ — ее нормальное решение, $\left\|\bar{A} - A\right\| \leqslant \mu$, $\left\|\bar{b} - b\right\| \leqslant \delta$, то $\lim\limits_{\mu,\delta\to 0} x_{\mu\delta} = \bar{x}$, т. е. вектор $x_{\mu\delta}$ является устойчивым приближением к вектору $\bar{x}$.*

Применение матричной коррекции в задачах идентификации

Представленный ниже перечень задач является иллюстративным и не претендует на полноту.

1. Оценивание параметров линейной системы в случае, когда ошибкам подвержены не только элементы вектора b но и матрицы A. (Несложно показать, что если ошибки в расширенной матрице исследуемой системы подчиняются нормальному распределению с нулевым средним и одинаковой для всех коэффициентов дисперсией, то псевдорешения исследуемой СЛАУ, получаемые в результате решения задачи Z_1, совпадут с решением, получаемым методом максимального правдоподобия).
2. Идентификации параметров зашумленного стационарного временного ряда. (При использовании модификаций метода де'Прони сводится к матричной коррекции несовместных СЛАУ с матрицами Ганкеля или Тёплица)
3. Решение обратной задачи для модели, заданной интегральным уравнением. (Несовместная СЛАУ появляется в результате дискретизации модели. При этом ошибки в коэффициентах матрицы системы могут быть обусловлены погрешностями дискретизации и погрешностями, вносимыми арифметикой с конечной разрядностью).

Литература

[1] *Еремин И. И., Мазуров В. Д., Астафьев Н. Н.* Несобственные задачи линейного и выпуклого программирования. — М: Наука, 1983. — 336 с.

[2] *Van Huffel S.* Analysis of the total least squares problem and its use in parameter estimation // PhD thesis, Dept. of Electr. Eng., Kattholieke Universiteit, Leuven, Belgium, 1987.

[3] *Горелик В. А., Ерохин В. И.* Оптимальная матричная коррекция несовместных систем линейных алгебраических уравнений по минимуму евклидовой нормы. — М: ВЦ РАН, 2004. — 193 с.

[4] *Горелик В. А., Ерохин В. И.* Оптимальная (по минимуму полиэдральной нормы) матричная коррекция несовместных систем линейных алгебраических уравнений и несобственных задач линейного программирования // Моделирование, декомпозиция и оптимизация сложных динамических процессов, М: ВЦ РАН, 2004. — С. 35–63.

[5] *Горелик В. А.* Матричная коррекция задачи линейного программирования с несовместной системой ограничений // ЖВМиМФ. — 2001. — Т. 41, № 11. — С. 1697–1705.

[6] *Горелик В. А., Ерохин В. И., Печенкин Р. В.* Оптимальная матричная коррекция несовместных систем линейных алгебраических уравнений с блочными матрицами коэффициентов // Дискретный анализ и исследование операций. Сер. 2. — 2005. — Т. 12, № 2. — С. 3–22.

[7] *Lemmerling P.* Structured total least squares: analysis, algorithms and applications // Ph.D. thesis, Kattholieke Universiteit, Leuven, Belgium, 1999.

[8] *Горелик В. А., Ерохин В. И., Печенкин Р. В.* Идентификация сигнала в виде суммы экспонент с помощью методов матричной коррекции несовместных линейных систем с матрицами Тёплица // Моделир., декомпоз. и оптимиз. сложных динамич. процессов, М: ВЦ РАН, 2003. — С. 74–88.

[9] *Тихонов А. Н.* О приближенных системах линейных алгебраических уравнений // ЖВМиМФ — 1980. — Т. 20, № 6. — С. 1373–1383.