Оценивание точности восстановления вещественнозначной функции на основе обучения распознаванию классов её значений

Блыщик В. Ф., Донской В. И.
donskoy@ccssu.crimea.ua
Симферополь, Таврический национальный университет им. В. И. Вернадского

Для восстановления вещественнозначных функций, заданных в конечном числе точек, обычно используются методы регрессионного анализа, и точность аппроксимации оценивается невязкой — степенью «близости» значений модельной функции к значениям восстанавливаемой функции по совокупности заданных точек. В данной работе рассматривается подход к восстановлению функций на основе теории распознавания, обозначаемый нами как CBFA — Classification Based Function Approximation.

Пусть X^n — признаковое пространство, $F\colon X^n \to \mathbb{R}$ — вещественнозначная функция, известная в k точках $x_1, \ldots, x_k$, т. е. заданная множеством пар $T = \bigl\{(x_m, y_m) \bigm| y_m = F(x_m),\ m = 1, \ldots, k\bigr\}$.

Реализация подхода CBFA предполагает выполнение следующих этапов.

1. Указать значения μ и M такие, что $\mu < y_m < M$ для всех $m = 1, \ldots, k$. Промежуток $[\mu, M]$ определяет множество допустимых значений функции F на X^n.
2. Разбить отрезок $[\mu, M]$ на l промежутков $\pi_j = [\lambda_{j-1}, \lambda_j),\ j = 1, \ldots, l$, так, чтобы в каждом промежутке разбиения находились точки из множества $\{x_1, \ldots, x_k\}$. Считать $\lambda_0 = \mu;\ \lambda_l = M$.
3. Поставить в соответствие каждому промежутку π_j среднее значение $\hat{F}_j$ по всем y_m таким, что $y_m \in \pi_j$. В результате будет получена кусочно-постоянная аппроксимация функции F.
4. Свяжем с построенным разбиением функцию $\omega\colon X^n \to \{1, \ldots, l\}$, принимающую значение j тогда и только тогда, когда $y \in \pi_j$. Функция ω порождается аппроксимируемой функцией F и заданным разбиением отрезка $[\mu, M]$. По множеству T строится обучающая выборка $T_0 = \bigl\{(x_m, \omega(x_m)) \bigm| m = 1, \ldots, k\bigr\}$. Эта выборка используется для обучения распознаванию значений функции ω.
5. При помощи некоторого алгоритма обучения распознаванию по выборке T_0 длины m строится решающее правило $D\colon X^n \to \{1, \ldots, l\}$, определяющее номер класса $j = D(x)$ для любого $x \in X^n$. Этот номер класса j определяет значение $\hat{F}_j$ восстанавливаемой функции в точке x. Будем полагать, что для используемого алгоритма распознава-

ния существует оценка вероятности ошибки вычисления класса (значения $\omega(x)$) такая, что $\mathsf{P}\{D(x) \neq \omega(x)\} < \delta$.

Величина $1-\delta$ мажорирует вероятностную меру события, состоящего в правильном нахождении номера класса $\omega(x)$, что эквивалентно истинности соотношения $\omega(x) = D(x)$ для произвольного $x \in X^n$. Это событие равносильно верному определению правилом D промежутка $[\lambda_{j-1}, \lambda_j)$, в котором находится значение $F(x)$ восстанавливаемой функции. Поэтому $\mathsf{P}\{F(x) \in [\lambda_{j-1}, \lambda_j)\} > 1 - \delta$, где $\mathsf{P}\{\cdot\}$ — вероятностная мера события. Полученный результат может быть оформлен в виде следующего утверждения.

Теорема 1. *Пусть вероятность ошибки правила D не превышает δ. Тогда для любой точки $x \in X^n$, отнесенной правилом D к классу j, значение восстанавливаемой функции F с вероятностью большей, чем $1 - \delta$, будет принадлежать промежутку $[\lambda_{j-1}, \lambda_j)$, $j = 1, \ldots, l$.*

Следствие 1. *Определяемое правилом D в точке $x \in X^n$ значение $\hat{F}_j$ аппроксимируемой функции с вероятностью большей, чем $1 - \delta$, будет отличаться от истинного значения $F(x)$ на величину, не превышающую $\varepsilon = \max\{\hat{F}_j - \lambda_{j-1}, \lambda_j - \hat{F}_j\}$.*

Таким образом, качество восстановления значений функции определяется «детальностью» разбиения и вероятностью ошибки применяемого алгоритма распознавания. Основным достоинством метода CBFA является возможность получения аналитических описаний классов значений восстанавливаемых функций при условии выбора подходящих для этой цели алгоритмов обучения распознаванию. Метод CBFA был использован для построения логических описаний классов значений псевдобулевой платежной функции в матричных играх с булевыми стратегиями и частично-заданной начальной информацией [1, 2]. CBFA позволяет достаточно просто оценивать результаты аппроксимации. Недостатком CBFA является необходимость «измельчения» разбиения для получения требуемой точности и, как следствие, — большое число классов на этапе обучения (обычно до нескольких десятков).

Литература

[1] *Блыщик В. Ф.* Решение игр с булевыми стратегиями и неполной информацией на основе синтеза ДНФ // Искусственный интеллект. — 2000. — № 2. — С. 9–12.

[2] *Блыщик В. Ф.* Алгоритм построения классов значений платежной функции по прецедентной начальной информации // Искусственный интеллект. — 2006. — № 2. — С. 10–13.