Алгоритмы параметрической идентификации сигнала, использующие обобщенный спектрально-аналитический метод

Долотова Н. С.

ndolotova@rambler.ru

Москва, МГУ им. М. В. Ломоносова, факультет ВМиК

В работе решается задача выявления в сигналах закономерностей достаточно общего вида. Предполагается, что сигнал задан последовательностью $f(t_i)$, где t_i — моменты времени, в которые производились измерения. Ставится задача проверить соответствие сигнала дифференциальному уравнению

$$F\bigl(\alpha_0,\ldots,\alpha_n,f(t),f'(t),\ldots,f^{(n)}(t)\bigr)=G\bigl(\beta_1,\ldots,\beta_n,f'(t),\ldots,f^{(n)}\bigr), \quad (1)$$

где F, G — заданные функции, $\alpha_0,\ldots,\alpha_n,\beta_1,\ldots,\beta_n$ — параметры модели, которые требуется идентифицировать по имеющимся данным $\{f(t_i)\}$.

Алгоритм параметрической идентификации сигнала

Для решения поставленной задачи предлагается следующий алгоритм, основанный на обобщенном спектрально-аналитическом методе, ОСАМ [1].

1. **Аппроксимация полученного сигнала сплайнами.** При аппроксимации происходит переход от дискретной функции $f(t_i)$ к ее непрерывному аналогу $f(t)$, что дает возможность определить значения функции в узлах гауссовой сетки.
2. **Разложение сигнала в ряд по полиномам Чебышева I рода.** Полученная непрерывная функция $f(t)$ раскладывается в ряд по полиномам Чебышева I рода: $f(t)\approx\sum_{i=0}^{N}C_nT_n(t)$, где C_n — коэффициенты разложения в ряд функции $f(t)$. Коэффициенты вычисляются с помощью квадратурной формулы Гаусса по имеющимся значениям функции в узлах гауссовой сетки, вычисленным в п. 1. В дальнейшем почти все вычисления производятся в пространстве коэффициентов разложения.
3. **Выбор параметрического уравнения, описывающего закономерность.** Так как любая непрерывная функция может быть описана некоторым дифференциальным уравнением, то на основании соответствия (не соответствия) данных уравнению, описывающему закономерность, можно делать вывод о том, отвечает или нет сигнал выбранному закону (1).
4. **Подбор оптимальных для сигнала параметров уравнения.** На данном этапе осуществляется подбор оптимальных параметров

Рис. 1. Пример работы алгоритма для модели гармонических колебаний с линейной частотной модуляцией.

уравнения. Поиск осуществляется методом градиентного спуска, максимизируя коэффициент корреляции левой и правой частей уравнения (1). Использование ОСАМ позволяет все вычисления производить в пространстве коэффициентов, что снижает погрешности, возникающие в результате перехода из пространства коэффициентов в пространство значений функции в точках.

5. **Определение наличия закономерности в сигнале.** Для определения присутствия закономерности в сигнале вычисляется коэффициент корреляции левой и правой частей уравнения 1 для подобранных в п. 4 параметров. В зависимости от полученного значения корреляции принимается одно из трёх решений:
   — $\mathrm{cor} > 0.7$ — закономерность присутствует в сигнале;
   — $\mathrm{cor} < 0.4$ — закономерность в сигнале отсутствует;
   — иначе не дается однозначного ответа о наличии или отсутствии закономерности в сигнале.

Основное отличие предлагаемого алгоритма параметрической идентификации сигнала заключается в том, что использование ОСАМ позволяет значительно упростить вычисления, возникающие на этапе подбора оптимальных параметров, а также обеспечивается устойчивость работы с сильно зашумлёнными сигналами.

Примеры работы алгоритма

Предложенный алгоритм был применен для выявления в сигналах закономерностей, имеющих вид гармонических колебаний или гармонических колебаний с линейной частотной модуляцией, описываемых параметрическим семейством уравнений

$$2\alpha f(t) = (2\alpha t + \beta) f''(t) + (2\alpha t + \beta)^2 f'(t).$$

Рис. 2. Прогнозирование роста численности населения г. Москвы.

Для проверки корректности работы алгоритма использовались искусственно синтезированные данные. Результаты решения задачи предложенным способом показаны на Рис. 1.

Также предлагаемый алгоритм применялся для прогнозирования роста населения г. Москвы. В XIX в. Р. Ф. Ферхьюстом было сделано предположение о том, что численность населения изменяется по логистическому закону $\alpha f(t) = f'(t) + \beta f^2(t)$. Результат параметрической идентификации по данным переписей населения показан на Рис. 2. Оказалось, что при сохранении существующей тенденции и справедливости гипотезы о логистическом росте максимальная численность населения г. Москвы (23 млн. чел.) будет достигнута примерно через 250 лет.

Литература

[1] *Дедус Ф. Ф., Куликова Л. И., Панкратов А. Н., Тетуев Р. К.* Классические ортогональные базисы в задачах аналитического описания и обработки информационных сигналов. — Москва, 2004.

[2] *Суетин П. К.* Классические ортогональные многочлены. — Москва: Наука, 1979.

[3] *Самарский А. А., Николаев Е. С.* Методы решения сеточных уравнений. — Москва: Наука, 1978.