Морфологический анализ изображений, искаженных аддитивным шумом

Чуличков А. И., Мурашев В. Э.

ach@cmp.phys.msu.ru

Москва, МГУ им. М. В. Ломоносова, физический факультет

В морфологическом анализе [1, 2, 3] введена операция сравнения по форме двух изображений (сигналов). Данная работа обобщает это понятие, вводя операцию сравнения по форме изображений, искаженных аддитивным шумом ограниченной яркости. Операция сравнения по форме является основой решения задач узнавания, классификации, оценки параметров формы сигнала.

Сравнение сигналов по форме

Изображением (сигналом) назовем числовую функцию f, заданную в конечном числе узлов сетки $\mathcal{X}$ плоскости $\mathbb{R}^2$ (числовой прямой $\mathbb{R}^1$). Множество узлов $\mathcal{X}$ будем называть полем зрения, а значение $f(x)$ функции f в точке $x \in \mathcal{X}$ — яркостью точки x поля зрения $\mathcal{X}$; множество всех изображений является евклидовым пространством $\mathbb{R}^n$, где n — число узлов сетки.

Пусть $\mathcal{F}$ — класс преобразований $F\colon \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$. Сигнал $g \in \mathbb{R}^n$ по форме не сложнее, чем $f \in \mathbb{R}^n$, если $g(x) = F(f(x))$, $x \in \mathcal{X}$. Например, если $f(x_i) < f(x_j)$ для некоторых узлов $x_i, x_j \in \mathcal{X}$, и $\mathcal{F}$ — класс монотонно неубывающих преобразований, то для сигнала $g(x) = F(f(x))$ выполнено неравенство $g(x_i) \leqslant g(x_j)$. В результате, например, если $f(x_{i-1}) < f(x_i) > f(x_{i+1})$ и $g(x) = F(f(x))$ для монотонной функции F, то может оказаться, что $g(x_{i-1}) = g(x_i) = g(x_{i+1})$, т. е. «локальный пик» сигнала f может пропасть при монотонном преобразовании яркости, «форма» изображения g окажется более простой. Множество всех сигналов, форма которых не сложнее, чем f, в морфологическом анализе носит название формы сигнала f. В случае, когда $\mathcal{F}$ — класс монотонно монотонно неубывающих функций, форма

$$V_f = \left\{ g \in \mathbb{R}^n \colon g(x) = F(f(x)),\ x \in \mathcal{X},\ f \in \mathcal{F} \right\}$$

сигнала $f \in \mathbb{R}^n$ является выпуклым замкнутым конусом в $\mathbb{R}^n$. При морфологическом анализе множеству V_f ставится в соответствие конструктивно определенный оператор проецирования на V_f, называемый формой изображения (сигнала) f.

Пусть теперь сами сигналы f и g ненаблюдаемы, так как процесс их измерения сопровождается аддитивной погрешностью, в результате чего результат измерения имеет вид

$$\xi(x) = f(x) + \nu(x), \quad \eta(x) = g(x) + \mu(x), \tag{1}$$

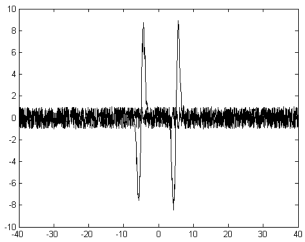

Рис. 1. График результата измерения акустического сигнала с помощью двух разнесенных микрофонов.

где погрешности измерения $\nu, \mu \in \mathbb{R}^n$ удовлетворяют условиям $|\nu(x)| \leqslant \leqslant \varepsilon_1(x)$, $|\mu(x)| \leqslant \varepsilon_2(x)$, $x \in \mathcal{X}$. Ответ на вопрос, будет ли $g \in \mathbb{R}^n$ не сложнее по форме, чем f, должен быть получен на основании наблюдения зашумленных сигналов (1). Ответ на него положителен, если найдутся такие $|\nu(x)| \leqslant \varepsilon_1(x)$, $|\mu(x)| \leqslant \varepsilon_2(x)$, и монотонно неубывающая функция $F \in \mathcal{F}$, что

$$\eta(x) - \mu(x) = F(\xi(x) - \nu(x)) \ \text{ для всех } \ x \in \mathcal{X}.$$

Рассмотрим на плоскости $\mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1$ множество прямоугольников

$$\big\{[f(x) - \varepsilon_1(x), f(x) + \varepsilon_1(x)] \times [g(x) - \varepsilon_2(x), g(x) + \varepsilon_2(x)],\ x \in \mathcal{X}\big\}.$$

Теперь $g \in \mathbb{R}^n$ не сложнее по форме, чем $f \in \mathbb{R}^n$ тогда и только тогда, когда в каждом прямоугольнике можно выбрать ровно одну точку так, чтобы через все n точек можно провести ломаную из отрезков прямых с неортицательным наклоном.

Проверка этого условия может быть выполнена методом динамического программирования.

Оценка относительного смещения сигналов

Мощность акустического сигнала измеряется микрофонами, разнесенными в пространстве. Графики результатов измерения изображены на Рис. 1 в условных единицах. Требуется оценить временную задержку сигналов, если известно, что микрофоны могут обладать нелинейным коэффициентом усиления, а измерения сопровождаются аддитивным шумом.

Рассмотрим метод, в основе которого лежит сравнение по форме двух сигналов, искаженных монотонным преобразованием. Будем сдвигать один сигнал относительно другого, и в предположении, что $\varepsilon_1(x) = = \varepsilon_2(x) = \varepsilon$ для всех $x \in \mathcal{X}$ найдем минимальное значение ε, при котором зашумленные сигналы $f, g \in \mathbb{R}^n$ сравнимы по форме.

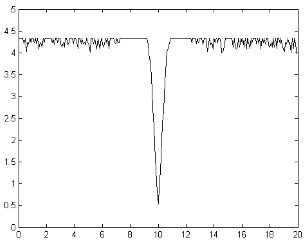

Рис. 2. Зависимость ограничения ε на величину погрешности измерения от значения сдвига сигналов, изображенных на Рис. 1, одного относительно другого.

Если считать, что большие значения погрешности менее возможны, чем малые, то в качестве оценки параметра сдвига следует выбрать то значение сдвига, которое соответствует наименьшему значению ε, при котором сигналы сравнимы по форме [4]. В данном случае это значение оказалось равным 10 усл. ед.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 05-01-00615.

Литература

[1] *Пытьев Ю. П.* Задачи морфологического анализа изображений // Математические методы исследования природных ресурсов Земли из Космоса. — М.: Наука, 1984.

[2] *Пытьев Ю. П.* Морфологический анализ изображений // Докл. АН СССР. — 1983. — Т. 269, № 5. — С. 1061–1064.

[3] *Pyt'ev Yu. P.* Morphological Image Analysis // Pattern Recognition and Image Analysis. — 1993. — V. 3, No. 1. — Pp. 19–28.

[4] *Пытьев Ю. П.* Возможность как альтернатива вероятности. Математические и эмпирические основы, применения. — Москва: Физматлит, 2007.