Исследование одного класса динамических процедур коллективного выбора

Л. А. Шоломов

Введен и формализован некоторый класс многотуровых (динамических) процедур коллективной оценки и выбора вариантов. Развита техника исследования моделей этого класса с использованием сопоставленных им энтропийных функций специального вида. Разработаны методы анализа процедур на сходимость, устойчивость, точность, полноту и корректность. В результате анализа выделен некоторый тип достаточно простых моделей, обладающих наилучшими в данном классе характеристиками.

1 Введение

Содержательные задачи выбора лучших объектов являются, как правило, плохо формализованными, поскольку нет достоверного критерия качества решения и выбор во многом субъективен. В этом смысле процедуры выбора некорректны. Программа исследования некорректных (эвристических) процедур была выдвинута Ю. И. Журавлевым: "задача состоит в том, чтобы, признав как реальность существование и пользу для практики некорректных процедур решения плохо формализованных задач, изучить с помощью строгих математических методов само множество таких процедур" [1]. Реализация этой программы применительно к задачам распознавания образов составляет важное направление исследований в этой области.

Цель данной работы – изучение с указанных позиций многотуровых процедур коллективной оценки и выбора вариантов. Многотуровые (итеративные) процедуры оценки вариантов находят все большее применение. Они предоставляют участникам возможность корректировки своих оценок с учетом сообщаемой им агрегированной информации об оценках других. Более подробно с многотуровыми процедурами можно ознакомиться в [2, 3, 4, 5]. Хотя накоплен большой опыт проведения многотуровых процедур и имеются экспериментальные данные по их протеканию (напр., [2]), математических результатов по анализу сходимости процедур и качества даваемых им решений практически нет.

Реально используемые многотуровые процедуры выбора вариантов проводятся за ограниченное число туров. При математическом анализе сходимости и качества процедур удобно считать, число туров (шагов) неограниченным. При этом будем говорить не о многотуровых, а о динамических процедурах. В данной работе проводится математическое исследование одного класса динамических процедур коллективной оценки и выбора вариантов. В моделях этого класса формализуется тенденция участников процедуры в большей степени поддерживать те из предпочитаемых ими объектов, шансы которых быть выбранными выше. Простейшая модель такого типа рассматривалась в [6].

В работе проведено сравнение различных моделей на основе исследования свойств соответствующих им динамических процедур. В число этих свойств входят:

- *сходимость* при выбранном участниками поведении в пределах предписанных правил;

- *устойчивость* к изменению локальных характеристик поведения участников на каждом шаге и выбору исходной точки, с которой начинается процедура;

- *полнота*, т. е. принципиальная возможность получения любого решения из заданного класса при соответствующих параметрах процедуры;

- *точность*, характеризуемая возможным разбросом решений при варьировании локальных характеристик поведения участников;

- *корректность* (по отношению к участникам) – учет в полученном решении мнений всех участников.

Определения этих понятий применительно к рассматриваемому классу динамических процедур будут даны в основном тексте.

Изучение моделей проведено с использованием сопоставленных им энтропийных функций специального вида. Доказано, что каждый шаг процедуры уменьшает значение энтропийной функции, поэтому при исследовании сходимости и устойчивости процедуры она играет роль функции Ляпунова. Отметим, что энтропийные функции подобного типа возникают и в задачах сжатия нечеткой (частично определенной) информации [7]. Энтропийные операторы других типов находят широкое применение при исследовании динамических систем и, в частности, – моделей коллективного взаимодействия [8, 9, 10, 11, 12].

2 Модели

Пусть для выбора лучшего объекта из k заданных используется процедура с n участниками. Целью является приписывание каждому объекту j некоторого показателя $q_j \geq 0$ ($q_1 + \ldots + q_k = 1$), интерпретируемого как "мера того, что объект является лучшим". Затем выбирается объект с наибольшим показателем, а если таких объектов несколько, – один из них.

Будем исходить из следующей схемы. На каждом шаге t итеративной процедуры участник i, $1 \leq i \leq n$, приписывает объекту j, $1 \leq j \leq k$, показатель $q_j^{(i)}(t) \geq 0$, так что набор $Q^{(i)}(t) = (q_1^{(i)}(t), \ldots, q_k^{(i)}(t))$ удовлетворяет условию нормировки $q_1^{(i)}(t) + \ldots + q_k^{(i)}(t) = 1$. По информации, полученной от участников, организаторы процедуры находят набор $Q(t) = (q_1(t), \ldots, q_k(t))$ агрегированных показателей. Будем полагать, что он вычисляется по формуле

$$Q(t) = \sum_{1 \leq i \leq n} w^{(i)} Q^{(i)}(t), \tag{1}$$

где $(w^{(1)}, \ldots, w^{(n)}) = W$ – набор положительных чисел (весов участников). Удобно считать набор весов нормированным: $w^{(1)} + \ldots + w^{(n)} = 1$, тогда и набор $Q(t)$ будет нормированным. Набор $Q(t)$ сообщается участникам. Каждый участник i некоторым образом преобразует (субъективизирует) его, образуя новый набор $f_i(Q(t)) = S^{(i)}(t) = (s_1^{(i)}(t), \ldots, s_k^{(i)}(t))$, также удовлетворяющий условию нормировки, и сдвигает $Q^{(i)}(t)$ в направлении $S^{(i)}(t)$, выбирая следующий набор на отрезке, соединяющем точки $Q^{(i)}(t)$ и $S^{(i)}(t)$:

$$Q^{(i)}(t+1) = (1 - \theta^{(i)}(t)) Q^{(i)}(t) + \theta^{(i)}(t) S^{(i)}(t), \tag{2}$$

задавшись некоторым $\theta^{(i)}(t)$, $0 \le \theta^{(i)}(t) \le 1$. Далее процесс повторяется. Если процедура сходится, ее результатом считается агрегированный набор $Q = (q_1, \dots, q_k)$, соответствующий точке сходимости. В противном случае она считается безрезультатной.

Остается уточнить, как осуществляется "субъективизация" f_i. Будем полагать, что каждый участник i разбивает объекты на ряд классов $T_1^{(i)}, \dots, T_{k_i}^{(i)}$, считая объекты из одного класса одинаковыми по предпочтительности, а из каждого предыдущего класса более предпочтительными, чем из следующих. Эта информация является основной и ей он руководствуется в течение всей процедуры. Обозначим через $\mathbf{T}^{(i)}$ разбиение, произведенное участником i, а через $\mathcal{T}$ – совокупность разбиений $\mathbf{T}^{(i)}$ для всех участников. Под *задачей* z будем понимать пару $(\mathcal{T}, W)$, где W характеризует способ агрегирования. Субъективизирующие функции f_i, $1 \le i \le m$, зависят от разбиений $\mathbf{T}^{(i)}$. Назначая разными способами субъективизирующие функции f_i, можно получать разные модели для одной и той же задачи z (см. дальше). Эти функции в течение процедуры не изменяются. Коэффициенты $\theta^{(i)}(t)$ могут меняться на каждом шаге и являются локальными характеристиками поведения участников.

Обозначим через $m(i,j)$ номер m класса $T_m^{(i)}$, содержащего объект j. Сделаем два допущения:

$$\text{для всякого } j \text{ найдется такое } m(i,j), \text{ что } m(i,j) \ne k_i, \tag{3}$$

$$\text{если } m(i,j) \ne k_i, \text{ то } q_j^{(i)}(0) > 0. \tag{4}$$

Допущение (3) означает, что в процедуре выбора лучшего объекта не участвуют те, которые относятся всеми участниками к худшим (их следует исключить), допущение (4), что в начальный момент всем объектам, не отнесенным участниками к худшим, они присваивают положительные оценки. Отметим, что оценки, приписанные им после завершения процедуры, могут оказаться нулевыми.

Теперь осталось описать типы рассматриваемых моделей, т. е. способы f_i преобразования наборов $Q(t)$ в $S^{(i)}(t)$.

Модель типа 0 [6] относится к случаю, когда каждый участник i разбивает объекты на два множества $T_1^{(i)}$ и $T_2^{(i)}$. Набор $S^{(i)}(t)$ образуется из $Q(t)$ приравниванием нулю компонент, соответствующих объектам из

$T_2^{(i)}$, и нормировкой остальных компонент. Это можно записать в виде

$$s_j^{(i)}(t) = \frac{\lambda_j^{(i)} q_j(t))}{\sum_u \lambda_u^{(i)} q_u(t)}, \tag{5}$$

где $\lambda_j^{(i)} = 1$ для $j \in T_1^{(i)}$ и $\lambda_j^{(i)} = 0$ для $j \in T_2^{(i)}$.

Модель типа 1 обобщает предыдущую на случай нескольких классов $T_1^{(i)}, \ldots, T_{k_i}^{(i)}$. Поведение участника i задается цепочкой чисел $\gamma_1^{(i)} \geq \ldots \geq \gamma_{k_i}^{(i)} \geq 0$, где k_i – число классов разбиения $(T_1^{(i)}, \ldots, T_{k_i}^{(i)})$. Компоненты $s_j^{(i)}(t)$ набора $S^{(i)}(t)$ вычисляются в соответствии с (5), где $\lambda_j^{(i)} = \gamma_{m(i,j)}^{(i)}$. Таким образом, при переходе от $Q(t)$ к $S^{(i)}(t)$ компоненты $q_j(t)$ растягиваются пропорционально $\gamma_{m(i,j)}^{(i)}$, т. е. у более предпочтительных для участника i объектов оценки увеличиваются, у менее предпочтительных – уменьшаются. Умножение всех $\gamma_l^{(i)}$ на константу не влияет на процедуру; удобно считать $\gamma_1^{(i)} = 1$ для всех i.

Модель типа 2. По исходным классам $T_1^{(i)}, \ldots, T_{k_i}^{(i)}$ строится цепочка вложенных классов $\hat{T}_1^{(i)} \subset \ldots \subset \hat{T}_{k_i}^{(i)}$, $\hat{T}_l^{(i)} = T_1^{(i)} \cup \ldots \cup \hat{T}_l^{(i)}$. Классу $\hat{T}_l^{(i)}$ сопоставляется набор $S^{(i,l)}(t) = (s_1^{(i,l)}(t), \ldots, s_k^{(i,l)}(t))$, образуемый согласно модели типа 0:

$$s_j^{(i,l)}(t) = \frac{\lambda_j^{(i,l)} q_j(t))}{\sum_u \lambda_u^{(i,l)} q_u(t)}, \tag{6}$$

где $\lambda_j^{(i,l)} = 1$ для $j \in \hat{T}_l^{(i)}$ и $\lambda_j^{(i.l)} = 0$ для $j \notin \hat{T}_l^{(i)}$. Набор показателей $S^{(i,l)}(t)$ соответствует точке зрения, что лучшими могут быть лишь объекты из $\hat{T}_l^{(i)}$ (при $l = 1$ она наиболее жесткая, при $l = k_i$ – наиболее мягкая). Поведение участника i описывается набором коэффициентов $\alpha_l^{(i)} \geq 0$, $1 \leq l \leq k_i$, $\alpha_1^{(i)} + \ldots + \alpha_{k_i}^{(i)} = 1$. В качестве $S^{(i)}(t)$ берется набор

$$S^{(i)}(t) = \sum_{1 \leq l \leq k_i} \alpha_l^{(i)} S^{(i,l)}(t), \tag{7}$$

промежуточный между наборами $S^{(i,l)}(t)$. Все коэффициенты $\alpha_l^{(i)}$ будем считать отличными от 0, ибо при $\alpha_l^{(i)} = 0$ классы $T_l^{(i)}$ и $T_{l+1}^{(i)}$ можно склеить.

Модели типов 1 и 2 задаются одинаковым числом параметров ($\gamma_l^{(i)}$ для моделей типа 1 и $\alpha_l^{(i)}$ для моделей типа 2). Вывод, какая из моделей лучше, будет сделан на основе анализа их свойств. Поскольку эти модели используют разные параметры, для их сравнения введем более общий класс моделей, в рамках которого они будут рассматриваться.

Общая модель. Поведение участника i задается некоторым количеством m_i цепочек

$$1 = \gamma_1^{(i,l)} \geq \ldots \geq \gamma_{k_i}^{(i,l)} \geq 0 \quad (1 \leq l \leq m_i), \tag{8}$$

где k_i – число классов разбиения, присутствующих в $\mathbf{T}^{(i)}$, и набором $(\alpha_1^{(i)}, \ldots, \alpha_{m_i}^{(i)})$, $\alpha_1^{(i)} + \ldots + \alpha_{m_i}^{(i)} = 1$, положительных чисел. Вначале в соответствии с моделью типа 1 находятся m_i наборов $S^{(i,l)}(t)$, где $s_j^{(i,l)}$ задается (6) при $\lambda_j^{(i,l)} = \gamma_{m(i,j)}^{(i,l)}$. Затем подобно (7) вычисляется линейная комбинация

$$S^{(i)}(t) = \sum_{1 \leq l \leq m_i} \alpha_l^{(i)} S^{(i,l)}(t). \tag{9}$$

Сделаем естественное допущение:

$$\forall i (1 \leq i \leq n) \forall m (1 \leq m \leq k_i - 1) \exists l \ \gamma_m^{(i,l)} > \gamma_{m+1}^{(i,l)}. \tag{10}$$

В противном случае классы $T_m^{(i)}$ и $T_{m+1}^{(i)}$ в процедуре не различаются и их можно склеить. Из допущений (3), (4), (10) и описания процедуры можно видеть, что $q_j(t) > 0$ для всех t и j и вопрос о делении на 0 в (6) не возникает.

Общую модель будем называть моделью типа 3. Большинство результатов будем доказывать для этой модели, для остальных моделей они будут следовать в качестве частных случаев.

3 Энтропийная характеристика моделей

С моделью M типа 3 свяжем следующую энтропийную функцию от набора переменных $Q = (q_1, \ldots, q_k)$, $q_1 \geq 0, \ldots, q_k \geq 0$, $q_1 + \ldots + q_k = 1$,

$$H_M(Q) = -\sum_{i,l} w^{(i)} \alpha_l^{(i)} \ln \left(\sum_j \lambda_j^{(i,l)} q_j \right), \tag{11}$$

где $1 \leq i \leq n$, $1 \leq l \leq m_i$, $1 \leq j \leq k$.

Фиксируем некоторую модель M и дальше вместо H_M будем записывать H. Роль функции H проясняется следующим утверждением.

Теорема 1 *Если $\theta^{(1)}(t) = \ldots = \theta^{(n)}(t) = \theta(t) > 0$, то справедливо неравенство*

$$H(Q(t)) \geq H(Q(t+1)), \tag{12}$$

которое при $Q(t+1) \neq Q(t)$ является строгим.

Доказательство. Для упрощения записей будем во всех величинах, относящихся к моменту t, параметр t опускать, а величины, относящиеся к моменту $t+1$, снабжать штрихами.

Вычислим новые величины средних с учетом (1), (2), (6), (9) и условия на кэффициенты $\theta^{(i)}(t)$

$$q'_j = \sum_i w^{(i)} (q_j^{(i)})' = (1-\theta) q_j + \theta \sum_{i,l} w^{(i)} \alpha_l^{(i)} \frac{\lambda_j^{(i,l)} q_j}{\sum_u \lambda_u^{(i,l)} q_u}. \tag{13}$$

Рассмотрим разность

$$\begin{aligned} \Delta H &= H(Q') - H(Q) = -\sum_{i,l} w^{(i)} \alpha_l^{(i)} \ln \left(\sum_j \lambda_j^{(i,l)} \frac{q'_j}{\sum_v \lambda^{(i,l)} v q_v} \right) = \\ &= -\sum_{i,l} w^{(i)} \alpha_l^{(i)} \ln \left(\sum_j \lambda^{(i,l)} \left((1-\theta) \frac{q_j}{\sum_v \lambda_v^{(i,l)} q_v} + \right.\right. \\ &\qquad \left.\left. + \sum_{a,b} \frac{w^{(a)} \alpha_b^{(a)} \lambda_j^{(a,b)}}{\sum_u \lambda_u^{(i,l)} q_u} \frac{\theta q_j}{\sum_v \lambda_v^{(i,l)} q_v} \right) \right). \end{aligned} \tag{14}$$

Воспользовавшись равенством

$$\sum_j \lambda_j^{(i,l)} \left((1-\theta) \frac{q_j}{\sum_v \lambda_v^{(i,l)} q_v} + \theta \frac{q_j}{\sum_v \lambda_v^{(i,l)} q_v} \right) = 1$$

и выпуклостью вниз функции $-\ln x$, из (14) выводим

$$\begin{aligned} \Delta H &\geq -\sum_{i,l} w^{(i)} \alpha_l^{(i)} \left((1-\theta) \sum_j \frac{\lambda_j^{(i,l)} q_j}{\sum_v \lambda_v^{(i,l)} q_v} \ln 1 + \right. \\ &\qquad \left. + \theta \sum_j \frac{\lambda_j^{(i,l)} q_j}{\sum_v \lambda_v^{(i,l)} q_v} \ln \sum_{a,b} \frac{w^{(a)} \alpha_b^{(a)} \lambda_j^{(a,b)}}{\sum_u \lambda_u^{(i,l)} q_u} \right). \end{aligned} \tag{15}$$

Введя обозначение

$$s_j = \sum_{i,l} w^{(i)} \alpha_l^{(i)} \frac{\lambda_j^{(i,l)} q_j}{\sum_v \lambda_v^{(i,l)} q_v} \tag{16}$$

и принимая во внимание равенство 0 первого слагаемого в (15), перепишем (15) в виде

$$\Delta H \le -\theta \sum_j s_j \ln \frac{s_j}{q_j} = \theta \sum_j s_j \ln \frac{q_j}{s_j}. \tag{17}$$

Используя (16), легко проверить, что $\sum_j s_j = 1$. Отсюда, из (17) и выпуклости логарифма получаем

$$\Delta H \le \theta \ln \sum_j q_j = 0,$$

что дает (12). Если в (12) имеет место равенство, то на всех этапах доказательства также должно быть равенство и, в частности,

$$\theta \sum_j s_j \ln \frac{q_j}{s_j} = \theta \ln \sum_j q_j = 0.$$

В силу положительности θ и строгой выпуклости логарифма это дает $s_j = q_j$ $(1 \le j \le k)$. Записав (13) с использованием (16) в виде $q'_j = (1-\theta)q_j + \theta s_j$, получаем $q'_j = q_j$. Теорема доказана.

Рассмотрим процедуру, в которой коэффициенты $\theta^{(i)}(t)$ для всех участников одинаковы. Из доказательства теоремы видно, что если $Q' = Q$ на некотором шаге, то набор Q в дальнейшем не изменится, а пока набор Q не стабилизировался, каждый шаг процедуры согласования строго уменьшает значение H. В связи с этим величину $H(Q(t))$ можно рассматривать как меру несогласованности на шаге t. Дополнительные доводы в пользу этого будут приведены в разделе 8.

4 Сходимость процедур

Обозначим через D_M множество точек минимума функции H_M (иногда индекс M будем опускать). В данном разделе доказывается, что для любой модели M типа 3 при поведении участников, удовлетворяющем условию

$$\theta^{(1)}(t) = \ldots = \theta^{(n)}(t) = \theta(t) \geq \theta_0 > 0, \tag{18}$$

процедура сходится к множеству D_M.

Лемма 1 *Точка Q содержится в D тогда и только тогда, когда при каждом j, $1 \leq j \leq k$,*

$$\sum_{i,l} \frac{w^{(i)} \alpha_l^{(i)} \lambda_j^{(i,l)}}{\sum_u \lambda_u^{(i,l)} q_u} \leq 1, \tag{19}$$

где строгое неравенство может иметь место лишь при тех j, для которых $q_j = 0$.

Доказательство этой леммы опускаем. Оно подобно доказательству соответствующей леммы из [13].

Обозначим через σ оператор, сопоставляющий каждому набору Q набор S в соответствии с (16). Если $J = \{i_1, \ldots, i_r\}$ – некоторое множество чисел, заключенных между 1 и k, то через V_J будем обозначать множество наборов Q, для которых $q_{i_1} = \ldots = q_{i_r} = 0$.

Лемма 2 *Множество неподвижных точек оператора σ распадается на непересекающиеся замкнутые многогранники, каждый из которых совпадает с множеством точек минимума функции H на некотором V_J и задается на V_J системой уравнений*

$$\sum_j \lambda_j^{(i,l)} q_j = a_{i,l}^J \quad (1 \leq i \leq n,\ 1 \leq l \leq m_i), \tag{20}$$

где $a_{i,l}^J$ – некоторые положительные числа. Один из многогранников соответствует пустому J, т. е. совпадает с D.

Доказательство аналогично приведенному в [13] для леммы Д1.

Теорема 2 *Если выполнено условие (18), то последовательность $\{Q(t)\}$ агрегированных показателей сходится к множеству D.*

Доказательство. Рассмотрим произвольную предельную точку $\hat{Q}$ последовательности $\{Q(t)\}$ и сходящуюся к ней подпоследовательность $\{Q(t_\nu)\}$. Очевидно, что $H(Q(t_\nu)) \to H(\hat{Q})$, а потому в силу теоремы 1

$$H(Q(t)) \to H(\hat{Q}). \tag{21}$$

Введя оператор $\sigma_\theta(Q) = (1-\theta)Q + \theta\sigma(Q)$, перепишем (13) в виде

$$Q(t+1) = \sigma_{\theta(t)}(Q(t)). \tag{22}$$

Выделим из $\{\theta(t_\nu)\}$ сходящуюся подпоследовательность $\{\theta(t_{\nu_\mu})\}$ и обозначим через $\hat{\theta}$ ее предел. Из (18) следует, что $\hat{\theta} > 0$. Последовательность $\sigma_{\hat{\theta}}(Q(t_{\nu_\mu}))$ сходится к $\sigma_{\hat{\theta}}(\hat{Q})$, поэтому

$$H(\sigma_{\hat{\theta}}(Q(t_{\nu_\mu}))) \to H(\sigma_{\hat{\theta}}(\hat{Q})). \tag{23}$$

С другой стороны, по выбору $\hat{\theta}$ и в силу (22) $\sigma_{\hat{\theta}}(Q(t\nu_\mu))$ ведет себя асимптотически как $Q(t_{\nu_\mu}+1)$ и согласно (21)

$$H(\sigma_{\hat{\theta}}(Q(t_{\nu_\mu}))) \to H(Q(t_{\nu_\mu}+1)) \to H(\hat{Q}) \tag{24}$$

Сравнивая (23) и (24), заключаем, что $H(\sigma_{\hat{\theta}}(\hat{Q})) = H(\hat{Q})$. Поэтому по теореме 1 $\hat{Q}$ является неподвижной точкой оператора $\sigma_{\hat{\theta}}$, а в силу $\sigma_{\hat{\theta}}(Q) = (1-\hat{\theta})Q + \hat{\theta}\sigma(Q)$ и $\hat{\theta} > 0$ – неподвижной точкой оператора σ.

Далее доказательство завершается с использованием лемм 1 и 2, в соответствии с планом доказательства теоремы Д из [13]. Теорема доказана.

Обозначим через Λ матрицу $\|\lambda_j^{(i,l)}\|$ с k столбцами $\tilde{\lambda}_j$ и $\sum_i m_i$ строками, а через Λ' – матрицу, полученную из нее удалением всех столбцов $\tilde{\lambda}_j$, для которых $\tilde{\lambda}_j < \tilde{\lambda}_{j'}$ при некотором j', и добавлением строки из единиц. Здесь $\tilde{\lambda}_j < \tilde{\lambda}_{j'}$ означает, что при всех i и l имеет место $\lambda_j^{(i,l)} \le \lambda_{j'}^{(i,l)}$ и хотя бы одно из этих неравенств – строгое.

Теорема 3 *Если ранг матрицы Λ' совпадает с числом ее столбцов, то H_M имеет единственную точку минимума.*

Доказательство. Если $\tilde{\lambda}_j < \tilde{\lambda}_{j'}$, то по лемме 1 для точки $Q \in D_M$ выполнено

$$\sum_{i,l} \frac{w^{(i)}\alpha_l^{(i)}\lambda_j^{(i,l)}}{\sum_u \lambda_u^{(i,l)} q_u} < \sum_{i,l} \frac{w^{(i)}\alpha_l^{(i)}\lambda_{j'}^{(i,l)}}{\sum_u \lambda_u^{(i,l)} q_u} \le 1.$$

Отсюда по лемме 1 заключаем, что $q_j = 0$.

Компоненты точки $Q \in D_M$ удовлетворяют уравнениям (20) при некоторых $a_{i,l}^J$ и соотношению $q_1 + \cdots + q_k = 1$. Подставив значения $q_j = 0$

для мажорируемых столбцов получим систему уравнений с матрицей Λ', из которой однозначно находятся остальные компоненты точки Q. Теорема доказана.

Будем считать число объектов k малым в сравнении с числом участников n. Нет никаких содержательных оснований полагать, чтобы среди малого числа ($\leq k$) длинных столбцов (длины $m_1+\cdots+m_n+1$) были линейно зависимые. Поэтому типичным следует считать невырожденный случай матрицы Λ', гарантирующий единственность точки минимума. Она и является точкой сходимости процедуры.

В теореме 2 идет речь о сходимости набора $Q(t)$ агрегированных показателей. Аналогичная сходимость имеет место и для наборов показателей $Q^{(i)}(t)$ всех участников i процедуры. Доказательство этого опирается на следующее утверждение.

Лемма 3 *Пусть последовательность точек $\{B(t),\ t=1,2,\ldots\}$ сходится к выпуклому множеству G, а последовательность положительных чисел $\{\theta(t)\}$ такова, что ряд $\sum_t \theta(t)$ расходится. Тогда последовательность точек $\{A(t)\}$, где*

$$A(t+1)=(1-\theta(t))A(t)+\theta(t)B(t),$$

$A(1)$ *– произвольно, также сходится к G.*

Доказательство. Для простоты будем считать, что $B(t)\in G$ при всех t (распространение на случай $B(t)\to G$ очевидно). Нетрудно проверить, что

$$A(t+1)=\mu(1)(A(1)-B(0))+\sum_{\tau=0}^{t}\mu(\tau+1)B(\tau), \tag{25}$$

где $\mu(\tau)=\theta(\tau-1)\prod_{i=\tau}^{t}(1-\theta(i))$, $\theta(0)=1$, $B(0)$ –произвольная точка. Возьмем $B(0)\in G$. Из равенства $\sum_{\tau=1}^{t}\mu(\tau)=1$ следует, что $\sum_{\tau=0}^{t}\mu(\tau+1)B(\tau)\in G$. Поскольку $\mu(1)\to 0$ при $\sum_t\theta(t)\to\infty$, то в силу (25) $A(t+1)\to G$. Лемма доказана.

Введем оператор $\sigma^{(i)}$, сопоставляющий каждой точке Q точку $S^{(i)}$ в соответствии с (6)–(9)

$$s_j^{(i)}=\sum_l \alpha_l^{(i)}\frac{\lambda_j^{(i,l)}q_j}{\sum_u \lambda_u^{(i,l)}q_u}. \tag{26}$$

Множество kn-мерных точек $(\sigma^{(1)}(Q), \ldots, \sigma^{(n)}(Q))$, $Q \in D_M$, обозначим через $\mathbf{D}_M$ (индекс M иногда будем опускать). Согласно лемме 2 найдутся числа $a_{i,l}$ такие, что $\sum_u \lambda_u^{(i,l)} q_u = a_{i,l}$ для всех $Q \in D$. Поэтому (26) для $Q \in D$ можно записать в виде

$$s_j^{(i)} = \left(\sum_l \frac{\alpha_l^{(i)} \lambda_j^{(i,l)}}{a_{i,l}} \right) q_j = c_{i,j} q_j,$$

где $c_{i,j}$ – константа. Отсюда и из выпуклости D следует выпуклость $\mathbf{D}$.

Следующая теорема позволяет при весьма слабом условии

$$\sum_{t=1}^{\infty} \theta(t) \to \infty, \tag{27}$$

где $\theta(t) = \min\{\theta^{(1)}(t), \ldots, \theta^{(n)}(t)\}$, переносить результаты о сходимости агрегированных показателей на показатели, приписываемые отдельными участниками.

Теорема 4 *Если выполнено условие (27) и набор $Q(t)$ агрегированных показателей сходится к множеству D, то n-ка $(Q^{(1)}(t), \ldots, Q^{(n)}(t))$ наборов показателей участников сходится к множеству* $\mathbf{D}$.

Доказательство. Из $Q(t) \to D$ следует, что

$$(S^{(1)}(t), \ldots, S^{(n)}(t)) = (\sigma^{(1)}(Q(t)), \ldots, \sigma^{(n)}(Q(t))) \to \mathbf{D}.$$

В силу леммы 3 и выпуклости множества $\mathbf{D}$ последовательность $(Q^{(1)}(t+1), \ldots, Q^{(n)}(t+1))$, где $Q^{(i)}(t+1) = (1-\theta(t))Q^{(i)}(t) + \theta(t)S^{(i)}(t)$, с учетом (27) также сходится к $\mathbf{D}$. Теорема доказана.

Множество $\mathbf{D}$, как и D, в типичном (невырожденном случае) состоит из единственной точки, к которой и сходится процедура. Отметим, что для каждого участника i набор показателей сходится к своей точке $Q^{(i)}$, отличной от точки Q сходимости агрегированных показателей. Таким образом, в моделях рассматриваемого класса не происходит подчинения индивидуальных мнений "усредненному".

5 Устойчивость процедур

Процедуру назовем *устойчивой*, если найдется точка Q такая, что при выполнении условия (27) процедура может сойтись лишь к точке Q, и существует вариант осуществления процедуры, удовлетворяющий (27), при котором она сходится (к точке Q). Другими словами, устойчивость означает существование единственной достижимой точки сходимости, не зависящей от локальных параметров и от исходной точки, с которой начинается процедура. При некотором поведении участников процедура, возможно, разойдется, но не сможет сойтись к другой точке.

Согласно теореме 2, если локальные характеристики $\theta^{(i)}(t)$ поведения участников удовлетворяют условию (18), то набор агрегированных показателей сходится к множеству D точек минимума соответствующей энтропийной функции H. Следующее утверждение показывает, что других точек сходимости быть не может.

Теорема 5 *Если выполнено условие (27) и набор агрегированных показателей, получаемых в результате процедуры, сходится к точке Q, то $Q \in D$.*

Доказательство. Введем обозначения

$$\begin{aligned} d^{(i)}(j,Q) &= \sum_l \frac{\alpha_l^{(i)}\lambda_j^{(i,l)}}{\sum_u \lambda_u^{(i,l)} q_u}, \\ d(j,Q) &= \sum_i w^{(i)} d^{(i)}(j,Q). \end{aligned} \tag{28}$$

Процедуру перепишем в виде

$$q_j^{(i)}(t+1) = (1-\theta^{(i)}(t))q_j^{(i)}(t) + \theta^{(i)}(t) d^{(i)}(j,Q(t)) \sum_u w^{(u)} q_j^{(u)}(t), \tag{29}$$

а условие (19) – в виде $d(j,Q) \le 1$.

Пусть Q – точка сходимости процедуры. Предположим, что $Q \notin D$, тогда по лемме 1 возможен один из случаев:

а) найдется j_0, при котором $d(j_0,Q) > 1$,

б) найдется j_0, при котором $d(j_0,Q) < 1$ и $q_{j_0} \ne 0$.

Рассмотрим а). Из сходимости $Q(t) \to Q$ и условия $d(j_0,Q) > 1$ следует, что найдутся такие неотрицательные числа $b^{(1)}, \ldots, b^{(n)}$ и момент t_0, что при $t > t_0$

$$d(j_0, Q(t)) \ge b^{(i)}, \quad 1 \le i \le n, \tag{30}$$

$$\mu = \sum_i w^{(i)} b^{(i)} > 1. \tag{31}$$

При этом, если среди чисел $\lambda_{j_0}^{(i,l)}$, $1 \le l \le m_i$ имеется отличное от 0, то согласно (28) $d^{(i)}(j_0, Q) > 0$ и можно взять $b^{(i)} > 0$.

Введем обозначения $B = (b^{(1)}, \dots, b^{(n)})$, $Q_{j_0}(t) = (q_{j_0}^{(1)}(t), \dots, q_{j_0}^{(n)}(t))$. Равенство $q_{j_0}^{(i)}(t) = 0$ может иметь место лишь при $\lambda_{j_0}^{(i,1)} = \dots = \lambda_{j_0}^{(i,m_i)} = 0$. Поэтому существует такое $\gamma > 0$, что

$$Q_{j_0}(t_0) \ge \gamma B. \tag{32}$$

Докажем по индукции, что при $t \ge t_0$

$$Q_{j_0}(t) \ge (\gamma \prod_{t=t_0}^{t} (1 + (\mu - 1)\theta(\tau - 1)))B. \tag{33}$$

При $t = t_0$ неравенство (33) совпадает с (32). Рассмотрим момент $t + 1$, где $t \ge t_0$. Воспользовавшись (33), (30), (31) и определением $\theta(t)$, выводим из (29)

$$\begin{aligned} q_{j_0}^{(i)}(t+1) \ge (1 - \theta^{(i)}(t))(\gamma \prod_{\tau=t_0}^{t} (1 + (\mu - 1)\theta(\tau - 1))b^{(i)} + \\ + \theta^{(i)}(t) b^{(i)} (\sum_u w^{(u)} \gamma \prod_{\tau=t_0}^{t} (1 + (\mu - 1)\theta(\tau - 1))b^{(u)}) = \\ = (\gamma \prod_{\tau=t_0}^{t} (1 + (\mu - 1)\theta(\tau - 1)))b^{(i)}(1 + \theta^{(i)}(t)(\sum_u w^{(u)} b^{(u)} - 1)) \ge \\ \ge (\gamma \prod_{\tau=t_0}^{t} (1 + (\mu - 1)\theta(\tau - 1)))b^{(i)}(1 + \theta(t)(\mu - 1)), \end{aligned}$$

что дает (33) при замене t на $t + 1$.

Из расходимости $\sum_t \theta(t)$ и $\mu > 1$ следует, что ненулевые компоненты $q_{j_0}^{(i)}(t)$ неограниченно возрастают. Это противоречит $q_{j_0}^{(i)}(t) \le 1$.

Случай б) рассматривается двойственным образом: строится вектор с бесконечно убывающими компонентами, оценивающий $Q_{j_0}(t)$ сверху.

Теорема доказана.

В типичном (невырожденном) случае множество D состоит из единственной точки и в соответствии с теоремой процедура будет устойчивой. Здесь речь шла о устойчивости набора агрегированных показателей. Подобно теореме 4 этот результат может быть распространен на наборы показателей для каждого участника.

6 Полнота и корректность

Модели M соответствует множество процедур (реализаций), каждая из которых определяется (наряду с параметрами модели, задающими субъективизирующие функции) выбором начальной точки и коэффициентов $\theta^{(i)}(t)$ локального поведения. Согласно теореме 5 процедура может сходиться лишь к точкам Q, содержащемся в множестве D_M точек минимума энтропийной функции H_M. Оставляя в стороне специальное исследование этого вопроса, будем считать D_M множеством решений, связанных с моделью M. Заметим, что всякая точка из D_M, являясь неподвижной, оставляется процедурой без изменения и в принципе может быть получена, если например, взята в качестве начальной. Это рассуждение некорректно лишь для точек из D_M, содержащих нулевые компоненты (см. ограничение (4) на выбор начальной точки).

Пусть $\mathbf{M}$ – некоторое множество моделей, а $\mathbf{M}_z$ – множество всех тех из них, которые соответствуют задаче z. Введем множество

$$D_{z,\mathbf{M}} = \bigcup_{M \in \mathbf{M}_z} D_M,$$

представляющее собой совокупность всех решений задачи z, которые можно получить с помощью моделей из $\mathbf{M}$. Обозначим через $\mathbf{M}_i$ ($i = 1,2,3$) множество всех моделей типа i. Вместо $D_{z,\mathbf{M}_3}$ будем использовать запись D_z. Множество моделей $\mathbf{M}$ назовем *полным*, если $D_{z,\mathbf{M}} = D_z$ (при этом $\mathbf{M}_3$ полно по определению).

Теорема 6 *Множество моделей* $\mathbf{M}_1$ *полно.*

Доказательство. Пусть M – некоторая модель типа 3, соответствующая задаче z. Согласно лемме 2 найдутся положительные числа $a_{i,l}$ такие, что для любой точки $Q \in D_M$

$$\sum_j \lambda_j^{(i,l)} q_j = a_{i,l}. \tag{34}$$

При $1 \le i \le n$, $1 \le j \le k$ введем величины

$$\mu_j^{(i)} = \sum_l \frac{\alpha_l^{(i)} \lambda_j^{(i,l)}}{a_{i,l}}. \tag{35}$$

Из (34) и (35) следует, что для $Q \in D_M$

$$\sum_j \mu_j^{(i)} q_j = \sum_j q_j \sum_l \frac{\alpha_l^{(i)} \lambda_j^{(i,l)}}{\sum_u \lambda_u^{(i,l)} q_u} = \sum_l \alpha_l^{(i)} = 1. \tag{36}$$

Пусть

$$\mu^{(i)} = \max_j \mu_j^{(i)}. \tag{37}$$

Построим модель $\hat{M} \in \mathbf{M}_1$, задав ее параметры равенством

$$\hat{\lambda}_j^{(i)} = \mu_j^{(i)} / \mu^{(i)}. \tag{38}$$

Убедимся, что $\hat{M}$ согласована с задачей z. Если $m(i,j) = m(i,j')$, то $\lambda_j^{(i,l)} = \lambda_{j'}^{(i,l)}$ при всех l, а потому согласно (35) и (38) $\hat{\lambda}_j^{(i)} = \hat{\lambda}_{j'}^{(i)}$. Если же $m(i,j) < m(i,j')$, то $\lambda_j^{(i,l)} \geq \lambda_{j'}^{(i,l)}$ при всех l и найдется l, для которого неравенство строгое. С учетом этого и положительности всех $\alpha_l^{(i)}$ из (35) и (38) заключаем, что $\hat{\lambda}_j^{(i)} > \hat{\lambda}_{j'}^{(i)}$. В силу сказанного, существуют такие $\hat{\gamma}_1^{(i)} > \cdots > \hat{\gamma}_{k_i}^{(i)} \geq 0$, что $\hat{\lambda}_j^{(i)} = \hat{\gamma}_{m(i,j)}$. При этом согласно (37) и (38) выполнено $\hat{\gamma}_1^{(i)} = 1$.

Для всякой точки $Q \in D_M$ в соответствии с (38), (36), (34) и (35)

$$\sum_i \frac{w^{(i)} \hat{\mu}_j^{(i)}}{\sum_u \hat{\lambda}_u^{(i)} q_u} = \sum_i \frac{w^{(i)} \mu_j^{(i)}}{\sum_u \mu_u^{(i)} q_u} = \sum_i w^{(i)} \mu_j^{(i)} = \sum_{i,l} \frac{w^{(i)} \alpha_l^{(i)} \lambda_j^{(i,l)}}{\sum_u \lambda_u^{(i,l)} q_u}. \tag{39}$$

По лемме 1 правая часть (39) не превосходит 1, причем строгое неравенство может иметь место лишь для $q_j = 0$. То же самое справедливо и для левой части (39), откуда по той же лемме, примененной к моделям типа 1, заключаем, что $Q \in D_M$, а потому $D_{\hat{M}} \supseteq D_M$. Это в силу произвольности модели $M \in \mathbf{M}_{3,z}$ дает $D_{z,\mathbf{M}_1} = D_z$.

Теорема доказана.

Будем говорить, что решение $Q = (q_1, \ldots, q_k)$ *противоречит мнению участника* i, если $q_j = 0$ для всех $j \in T_1^{(i)}$. Это означает, что все объекты, которые участник считает лучшими, процедура относит к худшим. Решение Q назовем *корректным*, если оно не противоречит мнению ни одного из участников. Обозначим через D_z^0 множество всех корректных решений из D_z. Множество моделей $\mathbf{M}$ назовем *корректно полным*, если $D_{z,\mathbf{M}} = D_z^0$.

Теорема 7 *Множество моделей* $\mathbf{M}_2$ *корректно полно.*

Доказательство. 1. В функции H_M для $M \in \mathbf{M}_2$ присутствует слагаемое $-w^{(i)}\alpha_1^{(i)} \ln \sum_j \lambda_j^{(i,1)} q_j$. В произвольной точке Q, минимизирующей H_M, значение $\sum_j \lambda_j^{(i,1)} q_j$ отлично от 0 и, следовательно, $q_j > 0$ для некоторого $j \in T_1^{(i)}$. Отсюда вытекает $D_M \subseteq D_z^0$ и

$$D_{z,\mathbf{M}_2} \subseteq D_z^0. \tag{40}$$

2. Рассмотрим произвольную точку $Q \in D_z^0$. Согласно теореме 6 существует модель $M \in \mathbf{M}_1$, для которой $Q \in D_M$. Укажем, как построить модель $\hat{M} \in \mathbf{M}_2$ такую, что $Q \in D_{\hat{M}}$.

Модель M задается совокупностью чисел $\gamma_l^{(i)}$, $1 \le i \le n$, $1 \le l \le k$,

$$1 = \gamma_1^{(i)} > \cdots > \gamma_{k_i}^{(i)} \ge 0. \tag{41}$$

Введем величины

$$\delta_l^{(i)} = \begin{cases} \gamma_l^{(i)} - \gamma_{l+1}^{(i)}, & l < k_i, \\ \gamma_{k_i}^{(i)}, & l = k_i, \end{cases} \tag{42}$$

$$\hat{\lambda}_j^{(i,l)} = \begin{cases} 1, & l \ge m(i,j), \\ 0, & l < m(i,j), \end{cases} \tag{43}$$

где $1 \le i \le n$, $1 \le l \le k_i$. Положим также

$$\beta_l^{(i)} = \delta_l^{(i)} \sum_u \hat{\lambda}_u^{(i,l)} q_u, \tag{44}$$

$$\beta^{(i)} = \sum_l \beta_l^{(i)}. \tag{45}$$

Из (43) следует $\sum_u \hat{\lambda}_u^{(i,l)} q_u \ge \sum_u \hat{\lambda}_u^{(i,1)} q_u$, откуда с учетом $Q \in D_z^0$

$$\sum_u \hat{\lambda}_u^{(i,l)} q_u > 0. \tag{46}$$

Параметры $\lambda_j^{(i)}$ и $\hat{\lambda}_j^{(i,l)}$ моделей M и $\hat{M}$ связаны следующим образом:

$$\lambda_j^{(i)} = \gamma_{m(i,j)}^{(i)} = \sum_{l \ge m(i,j)} \delta_l^{(i)} = \sum_l \hat{\lambda}_j^{(i,l)} \delta_l^{(i)} = \sum_l \frac{\hat{\lambda}_j^{(i,l)} \beta_l^{(i)}}{\sum_u \hat{\lambda}_u^{(i,l)} q_u}. \tag{47}$$

Отсюда, используя (45), получаем

$$\sum_j \lambda_j^{(i)} q_j = \sum_l \beta_l^{(i)} = \beta^{(i)}. \tag{48}$$

Назначим коэффициенты $\hat{\alpha}_l^{(i)}$, определяющие модель $\hat{M}$, положив

$$\hat{\alpha}_l^{(i)} = \beta_l^{(i)} / \beta^{(i)}. \tag{49}$$

Из (41), (42), (44), (46) и (49) следует, что $\hat{\alpha}_l^{(i)} > 0$ для $l \neq m_i$. Воспользовавшись (48), (47) и (49), выводим

$$\sum_i \frac{w^{(i)} \lambda_j^{(i)}}{\sum_u \lambda_u^{(i)} q_u} = \sum_i \frac{w^{(i)} \lambda_j^{(i)}}{\beta^{(i)}} = \sum_i \frac{w^{(i)}}{\beta^{(i)}} \sum_l \frac{\hat{\lambda}_j^{(i,l)} \beta_l^{(i)}}{\sum_u \hat{\lambda}_u^{(i,l)} q_u} = \sum_{i,l} \frac{w^{(i)} \hat{\alpha}_l^{(i)} \hat{\lambda}_j^{(i,l)}}{\sum_u \hat{\lambda}_u^{(i,l)} q_u}. \tag{50}$$

Учитывая $Q \in D_M$, по лемме 1 заключаем, что левая часть в (50) не превосходит 1 и строгое неравенство может иметь место лишь при $q_j = 0$. Это же справедливо для правой части (50) и по той же лемме выполнено $Q \in D_{\hat{M}}$. В силу произвольности $Q \in D_z^0$ это дает включение $D_{z,\mathbf{M}_2}$, которое совместно с (40) устанавливает корректную полноту $\mathbf{M}_2$. Теорема доказана.

Тем самым показано, что всякое решение, даваемое общей моделью, может быть получено и в классе моделей типа 1, а всякое корректное решение – в классе моделей типа 2.

7 Точность моделей

Фиксируем задачу $z = (\mathcal{T}, W)$ и дальше, не оговаривая особо, будем рассматривать лишь модели для задачи z. Будем говорить, что модель M_1 *не грубее* модели M_2 (модель M_2 *не точнее* M_1), если $D_{M_1} \subseteq D_{M_2}$. В случае строгого включения модель M_1 будем называть *более точной*, модель M_2 – *более грубой*.

Лемма 4 *Для любых моделей M_1 и M_2 с непустым $D_{M_1} \cap D_{M_2}$ существует модель M_3, для которой $D_{M_3} = D_{M_1} \cap D_{M_2}$.*

Доказательство. Если энтропийную функцию представить в виде

$$H_M = \sum_i w^{(i)} H_M^{(i)},$$

сгруппировав члены для каждого участника, то таким представлением модель M определяется однозначно. Поэтому операции над энтропийными функциями можно рассматривать как операции над моделями. Будем говорить, что M_3 является *линейной комбинацией моделей* M_1 и M_2, если $H_{M_3} = \kappa H_{M_1} + (1-\kappa) H_{M_2}$, где $0 \le \kappa \le 1$. Покажем, что при $0 < \kappa < 1$ модель M_3 удовлетворяет формулировке леммы.

Если $Q_0 \in D_{M_1} \cap D_{M_2}$, то для любого Q

$$H_{M_3}(Q) = \kappa H_{M_1}(Q) + (1-\kappa) H_{M_2}(Q) \ge \kappa H_{M_1}(Q_0) + (1-\kappa) H_{M_2}(Q_0). \quad (51)$$

С другой стороны, $H_{M_3}(Q_0)$ совпадает с правой частью (51) и потому $Q_0 \in D_{M_3}$. Поскольку для любого $Q \notin D_{M_1} \cap D_{M_2}$ в (51) имеет место строгое неравенство, то $D_{M_3} = D_{M_1} \cap D_{M_2}$. Лемма доказана.

Лемма 5 *Пусть* $\mathbf{M}$ *– некоторое множество моделей, в котором для любых* $M_1, M_2 \in \mathbf{M}$ *выполнено включение* $D_{M_1} \subseteq D_{M_2}$ *либо* $D_{M_1} \supseteq D_{M_2}$*. Тогда среди множеств* D_M*,* $M \in \mathbf{M}$*, имеется лишь конечное число различных.*

Доказательство. Множества D_M представляют собой выпуклые замкнутые многогранники (лемма 1). Покажем, что если $D_{M_1} \subseteq D_{M_2}$ и $\dim(D_{M_1}) = \dim(D_{M_2})$, то $D_{M_1} = D_{M_2}$. Будем считать, что D_{M_1} содержит более одной точки, иначе утверждение очевидно.

Предположим противное, что $D_{M_1} \neq D_{M_2}$. Пусть $Q_1 \in D_{M_2} \setminus D_{M_1}$ и Q_2 – произвольная внутренняя точка D_{M_1}. Поскольку $\dim(D_{M_1}) = \dim(D_{M_2})$, отрезок, соединяющий точки Q_1 и Q_2, пересекается с границей множества D_{M_1} в некоторой точке Q_3. При этом $Q_3 = \kappa Q_1 + (1-\kappa) Q_2$, $0 < \kappa < 1$, откуда

$$Q_1 = \frac{\kappa - 1}{\kappa}\, Q_2 + \frac{1}{\kappa}\, Q_3. \quad (52)$$

Обозначив через $q_{v,j}$ компоненты набора Q_v ($v = 1, 2, 3$), с учетом $Q_2, Q_3 \in D_{M_1}$ по лемме 2 заключаем, что

$$\sum_j \lambda_j^{(i,l)} q_{2,j} = \sum_j \lambda_j^{(i,l)} q_{3,j} = a_{i,l},$$

где параметры $\lambda_j^{(i,l)}$ относятся к модели M_1. Отсюда в силу (52)

$$\sum_j \lambda_j^{(i,l)} q_{1,j} = \frac{\kappa - 1}{\kappa}\, a_{i,l} + \frac{1}{\kappa}\, a_{i,l} = a_{i,l}.$$

По лемме 2 это означает, что $Q_1 \in D_{M_1}$ в противоречии с выбором точки Q_1. Поэтому $D_{M_1} = D_{M_2}$. Из сказанного вытекает, что количество различных множеств D_M, $M \in \mathbf{M}$, не превосходит $\max_{M \in \mathbf{M}} \dim(D_M) \le k$ и, следовательно, конечно. Лемма доказана.

Для $Q \in D_z$ обозначим через $\mathbf{M}(Q)$ совокупность всех моделей M (для задачи z) таких, что $Q \in D_M$. Множество

$$\Delta(Q) = \bigcap_{M \in \mathbf{M}(Q)} D_M$$

назовем *областью неотличимости решения* Q. Для $Q' \in \Delta(Q)$ не существует модели, имеющей решением Q и не имеющей Q'. Если найдется модель M, для которой $D_M = \Delta(Q)$, будем называть ее *максимально точной* (для решения Q).

Лемма 6 *Всякое $Q \in D_z$ имеет максимально точную модель.*

Доказательство. Возьмем произвольную модель $M_1 \in \mathbf{M}(Q)$. Если существует модель $M_2 \in \mathbf{M}(Q)$, для которой $D_{M_1} \not\subseteq D_{M_2}$, по лемме 4 образуем модель M_1' с множеством решений $D_{M_1'} = D_{M_1} \cap D_{M_2}$. Затем, если найдется модель $M_3 \in \mathbf{M}(Q)$, для которой $D_{M_1'} \not\subseteq D_{M_3}$, образуем модель M_2' с множеством решений $D_{M_2'} = D_{M_1'} \cap D_{M_3}$ и т. д. Поскольку $D_{M_1'} \supset D_{M_2'} \supset \cdots$, последовательность $M_1', M_2', \ldots$ по лемме 5 конечна. Модель, завершающая эту последовательность, будет искомой. Лемма доказана.

Обозначим через $\Sigma(Q)$ семейство всех различных множеств D_M, $M \in \mathbf{M}(Q)$.

Лемма 7 *В семействе $\Sigma(Q)$ можно (однозначно) выделить семейство $\Sigma_0(Q)$, в котором*

- для всякого $D_M \in \Sigma(Q)$ найдется $D_{M'} \in \Sigma(Q)$ такое, что $D_{M'} \supseteq D_M$,

- для любых различных $D_M, D_{M'} \in \Sigma(Q)$ неверно, что $D_{M'} \supseteq D_M$.

Доказательство. Оно легко извлекается из того факта, что согласно лемме 5 любая возрастающая цепочка $D_M \subset D_{M_1} \subset D_{M_2} \subset \ldots$ обрывается через конечное число шагов. Лемма доказана.

Модели M, для которых $D_M \in \Sigma_0(Q)$, назовем *максимально грубыми*. Модели M и M' будем называть *эквивалентными*, если $D_M = D_{M'}$.

Теорема 8 *1. Все модели типа 2 являются максимально точными.*

2. Для всякой максимально грубой модели имеется эквивалентная модель типа 1.

Доказательство. 1. Рассмотрим произвольную модель M типа 2 и покажем, что она является максимально точной для любого $Q \in D_M$.

По лемме 6 решение Q имеет максимально точную модель $\hat{M}$. Параметры моделей M и $\hat{M}$ обозначим соответственно $\alpha_l^{(i)}$, $\lambda_j^{(i,l)}$ и $\hat{\alpha}_m^{(i)}$, $\hat{\lambda}_j^{(i,m)}$, $\hat{\gamma}_l^{(i,m)}$. Введем числа

$$\delta_l^{(i,m)} = \begin{cases} \hat{\gamma}_l^{(i,m)} - \hat{\gamma}_{l+1}^{(i,m)}, & l < k_i, \\ \hat{\gamma}_{k_i}^{(i,m,)}, & l = k_i, \end{cases}$$

$1 \leq i \leq n$, $1 \leq l \leq k_i$, $1 \leq m \leq m_i$. Аналогично (47)

$$\hat{\lambda}_j^{(i,m)} = \sum_l \delta_l^{(i,m)} \lambda_j^{(i,l)}. \tag{53}$$

Отсюда

$$\sum_j \hat{\lambda}_j^{(i,mq_j)} = \sum_l \delta_l^{(i,m)} \sum_j \lambda_j^{(i,l)} q_j. \tag{54}$$

Положим

$$\hat{a}_{i,m} = \sum_j \hat{\lambda}_j^{(i,m)} g_j, \qquad b_{i,l} = \sum_j \lambda_j^{(i,l)} q_j \tag{55}$$

Рассмотрим произвольную точку $Q' \in D_M$. По лемме 2

$$\sum_j \lambda_j^{(i,l)} q'_j = \sum_j \lambda_j^{(i,l)} q_j = b_{i,l} \tag{56}$$

и в силу (53)–(56)

$$\sum_j \hat{\lambda}_j^{(i,l)} q'_j = \sum_j \hat{\lambda}_j^{(i,l)} q_j = \hat{a}_{i,m}.$$

Отсюда по лемме 2 с учетом $Q \in D_{\hat{M}}$ заключаем, что $Q' \in D_{\hat{M}}$. Это доказывает включение $D_M \subseteq D_{\hat{M}}$. Поскольку модель $\hat{M}$ является максимально точной, тем же свойством обладает и M.

2. Взяв произвольную модель M, для которой $D_M \in \Sigma_0(Q)$, построим по ней в соответствии с теоремой 6 модель $\hat{M}$ типа 1 такую, что $D_{\hat{M}} \supseteq$

D_M. Из максимальности D_M следует $D_{\hat{M}} = D_M$, а потому $\hat{M}$ является максимально грубой.

Теорема доказана.

Пример. Рассмотрим задачу с 2 участниками, 3 объектами, системами множеств $T_1^{(1)} = \{1\}$, $T_2^{(1)} = \{2\}$, $T_3^{(1)} = \{3\}$ и $T_1^{(2)} = \{3\}$, $T_2^{(2)} = \{2\}$, $T_3^{(2)} = \{1\}$, весами $w^{(1)} = w^{(2)} = 1/2$. Пусть используется модель $M = M_{\rho,\sigma}$ типа 1 с параметрами $\lambda_1^{(1)} = \lambda_1^{(2)} = 1$, $\lambda_2^{(1)} = \sigma$, $\lambda_2^{(2)} = 1 - \sigma + \rho$, $\lambda_3^{(1)} = \lambda_3^{(2)} = \rho$, где $1 > \sigma > \rho$. Ей соответствует энтропийная функция

$$H_M = H_{\rho,\sigma} = \frac{1}{2}\ln(q_1 + \sigma q_2 + \rho q_3) + \frac{1}{2}\ln(\rho q_1 + (1 - \sigma + \rho)q_2 + q_3).$$

Введя величины $\alpha = (q_1 + \sigma q_2 + \rho q_3)^{-1}$, $\beta = (\rho q_1 + (1 - \sigma + \rho)q_2 + q_3)^{-1}$, запишем условия минимума (19) в виде

$$\begin{cases} 1/2\,(\alpha + \rho\beta) = 1, \\ 1/2\,(\sigma\alpha + (1 - \sigma + \rho)\beta) = 1, \\ 1/2\,(\rho\alpha + \beta) = 1. \end{cases}$$

Из них находим $\alpha = \beta = \dfrac{2}{1+\rho}$, и уравнения (20) приобретают вид

$$\begin{cases} q_1 + \sigma q_2 + \rho q_3 = (1+\rho)/2, \\ \rho q_1 + (1 - \sigma + \rho)q_2 + q_3 = (1+\rho)/2. \end{cases}$$

Их решениями (q_1, q_2, q_3) являются наборы

$$Q_{\rho,\sigma,u} = \left(\frac{1}{2} - \frac{\sigma - \rho}{1 - \rho}u,\ u,\ \frac{1}{2} - \frac{1 - \sigma}{1 - \rho}u\right)$$

с параметром $u \in \left[0, \dfrac{1-\rho}{2(1-\sigma)}\right]$. Множество $D_{\rho,\sigma}$ точек минимума функции $H_{\rho,\sigma}$ образуется всеми $Q_{\rho,\sigma,u}$.

Точки $Q_{\rho,\sigma,u}$ при различных u не различимы моделью M, т. е. при варьировании локальных параметров $\theta^{(i)}(t)$ и начальной точки процедура может сойтись к любой из них. При $u = \dfrac{1-\rho}{2(1-\sigma)}$ получается решение, противоречащее мнению участника 2 и, следовательно, модель M некорректна. Для всякого корректного решения $Q_{\rho,\sigma,u}$ из $D_{\rho,\sigma}$ существует порождающая его модель типа 2 (теорема 7). Используя теорему 3, легко доказать, что эта модель является точной, т. е. может сойтись лишь к точке $Q_{\rho,\sigma,u}$.

8 Некоторые свойства решений

На основе теоремы 1 величину $H_M(Q)$ можно трактовать как меру несогласованности набора Q с мнениями участников, а значение $H(M) = \min_Q H_M(Q)$, соответствующее точке сходимости процедуры, – как неустранимую меру несогласованности. В пользу этого свидетельствуют и следующие свойства величины $H(M)$.

1°. $H(M) = 0$ *тогда и только тогда, когда имеется объект, названный в числе лучших всеми участниками.*

Рассмотрим некоторую точку Q, минимизирующую функцию $H_M(Q)$. Обозначим через T множество всех j, для которых $q_j > 0$. Из (11) следует, что $H(M) = H_M(Q) = 0$ лишь если при всех i и l

$$\sum_j \lambda_j^{(i,l)} q_j = 1. \tag{57}$$

В соответствии с (10) для каждого i возьмем $l = l(i)$, при котором $\gamma_1^{(i,l)} > \gamma_2^{(i,l)}$. Для этого значения l согласно (8) выполнено $\gamma_1^{(i,l)} = 1$, $\gamma_m^{(i,l)} < 1$ при $m > 1$. С учетом $\sum_j q_j = 1$ из (57) заключаем, что все j с ненулевыми q_j содержатся в $T_1^{(i)}$, а потому $T_1^{(i)} \supseteq T$. Это означает, что пересечение всех множеств $T_1^{(i)}$ непусто. Свойство доказано.

Пусть вместо разбиения $\mathbf{T}^{(i)} = (T_1^{(i)}, \dots, T_{k_i}^{(i)})$ участник i использует $\hat{\mathbf{T}}^{(i)} = (\hat{T}_1^{(i)}, \dots, \hat{T}_{k_i}^{(i)})$. Скажем, что разбиение $\hat{\mathbf{T}}^{(i)}$ *категоричнее* $\mathbf{T}^{(i)}$, если

$$\hat{T}_1^{(i)} \subseteq T_1^{(i)},\ \hat{T}_1^{(i)} \cup \hat{T}_2^{(i)} \subseteq T_1^{(i)} \cup T_2^{(i)},\ \dots,\ \hat{T}_1^{(i)} \cup \dots \cup \hat{T}_{k_i}^{(i)} \subseteq T_1^{(i)} \cup \dots \cup T_{k_i}^{(i)}.$$

Обозначим через $\hat{M}$ модель полученную из M заменой системы разбиений $\mathcal{T} = (\mathbf{T}^{(1)}, \dots, \mathbf{T}^{(n)})$ на $\hat{\mathcal{T}} = (\hat{\mathbf{T}}^{(1)}, \dots, \hat{\mathbf{T}}^{(n)})$ с сохранением параметров $\gamma_j^{(i,l)}$ и $\alpha_l^{(i)}$ модели M. Будем говорить, что *модель $\hat{M}$ категоричнее модели M*, если при каждом i разбиение $\hat{\mathbf{T}}^{(i)}$ категоричнее $\mathbf{T}^{(i)}$.

2°. *Если модель $\hat{M}$ категоричнее M, то $\hat{H}(M) \geq H(M)$.*

Величины, связанные с моделью $\hat{M}$, будем снабжать значком $\hat{}$. Легко видеть, что для любых i $(1 \leq i \leq n)$ и j $(1 \leq j \leq k)$ выполнено $\hat{m}(i,j) \geq m(i,j)$, а потому в силу (8) имеет место $\hat{\lambda}_j^{(i,l)} \leq \lambda_j^{(i,l)}$ и $\sum_j \hat{\lambda}_j^{(i,l)} q_j \leq \sum_j \lambda_j^{(i,l)} q_j$ для любого Q. Взяв в качестве Q точку, на которой достигается значение $H(M)$, получаем

$$H(M) = -\sum_{i,l} w^{(i)} \alpha_l^{(i)} \ln \sum_j \lambda_j^{(i,l)} q_j \geq -\sum_{i,l} w^{(i)} \alpha_l^{(i)} \ln \sum_j \hat{\lambda}_j^{(i,l)} q_j \geq H(\hat{M}).$$

Утверждение доказано. Таким образом, большая категоричность участников понижает меру согласованности.

Объект j назовем *паретовским* (оптимальным по Парето), если не существует такого объекта j', что при всех i имеет место $m(i,j') \leq m(i,j)$ и хотя бы одно из неравенств – строгое. Это означает, что нет объекта, считаемого всеми участниками не хуже j, а некоторыми – лучше. Следующее свойство показывает, что удаление непаретовских объектов не влияет на результат процедуры.

3°. *Если M' – модель, полученная из M путем удаления непаретовских объектов (при сохранении параметров модели M), то $D_{M'} = D_M$, $H(M') = H(M)$.*

В первом равенстве наборы из $D_{M'}$ должны быть выравнены по длине с наборами из D_M путем дописывания нулей на места, соответствующие непаретовским объектам. Это свойство фактически было установлено при доказательстве теоремы 3.

Обозначим через $P^{(i)}$ множество объектов, являющихся паретовскими без учета участника i. Будем говорить, что *участник i не несет новой информации* (о лучших объектах), если $P^{(i)} \subseteq T_1^{(i)}$. Следующее свойство показывает, что такие участники не влияют на результат.

4°. *Если M' – модель, полученная из M путем удаления участника, не несущего новой информации, то $D_{M'} = D_M$, $H(M') = H(M)$.*

Для доказательства рассмотрим набор $Q \in D_{M'}$ и вычислим на нем значение произвольного члена $-w^{(i)}\alpha_l^{(i)} \ln \sum_j \lambda_j^{(i,l)} q_j$ функции H_M, относящегося к участнику i. В силу включения $P^{(i)} \subseteq T_1^{(i)}$ все объекты $j \in P^{(i)}$ имеют $\lambda_j^{(i,l)} = \gamma_1^{(i,l)} = 1$ и в соответствии со свойством 3°

$$\sum_j \lambda_j^{(i,l)} q_j = \sum_{j \in P^{(i)}} \lambda_j^{(i,l)} q_j = \sum_{j \in P^{(i)}} q_j = 1.$$

Отсюда следует, что выбранный член равен 0 и потому

$$H(M) \leq H_M(Q) = H_{M'}(Q) = H(M'). \tag{58}$$

С другой стороны, $H_M(\hat{Q}) \geq H_{M'}(\hat{Q})$ для любого $\hat{Q}$, что с учетом (58) дает $H(M) = H(M')$. Отсюда заключаем также, что $D_{M'} \subseteq D_M$. Если $\hat{Q} \in D_M \setminus D_{M'}$, то

$$H(M) = H_M(\hat{Q}) \geq H_{M'}(\hat{Q}) > H(M'),$$

поэтому $D_M = D_{M'}$.

9 Заключение

В данной работе применительно к задачам коллективной оценки и выбора вариантов реализован предложенный Ю. И. Журавлевым подход к исследованию некорректных (эвристических) процедур, который состоит в том, чтобы вместо рассмотрения индивидуальных процедур изучать с помощью строгих математических методов свойства классов процедур. Здесь развита техника анализа некоторого класса динамических процедур коллективного выбора на сходимость, устойчивость, точность, полноту, корректность. Анализ основан на изучении свойств энтропийных функций специального вида, связанных с моделями. Установлено, что процедуры могут сходиться лишь к точкам минимума энтропийных функций. Это применительно к моделям рассматриваемого типа дает обоснование принципа минимизации энтропии, исходя из содержательного поведения участников процедуры. Точки минимума могут быть найдены с помощью итерационного процесса (13) при $\theta = 1$.

В результате исследования установлено, что модели типа 2 являются сходящимися (в невырожденном случае), устойчивыми, наилучшими по точности, коректными, полными в классе корректных моделей. Они просты, задаются малым числом параметров. Поэтому при использовании динамических моделей рассматриваемого в работе типа следует рекомендовать модели типа 2. Этими же свойствами обладают введенные ранее [6] модели типа 0, которые соответствуют моделям типа 2 при разбиении объектов на два класса.

Работа выполнена при финансовой поддержке ОИТВС РАН по программе "Фундаментальные основы информационных технологий и систем" и Российского фонда фундаментальных исследований (проект 06-01-00577).

Список литературы

[1] Журавлев Ю. И. Об алгебраическом подходе к решению задач распознавания или классификации//Проблемы кибернетики. Вып. 33. - М.: Наука, 1978. С. 5–68.

[2] The Delphi Method Techniques and Applications /Linstone H. A., Turoff M. eds. - Mass.: Addison-Wesley Reading, 1975.

[3] Шнейдерман М. В. Итеративные процедуры сбора экспертных данных (обзор)// Автоматика и телемеханика. 1982. N 4. С. 170–175.

[4] Афанасьев В. М., Лезина З. М. Аукционно-иеративные методы коллективного выбора вариантов (обзор проблемы)// Автоматика и телемеханика. 1982. N 10. С. 5–24.

[5] Вольский В. И., Лезина З. М. Голосование в малых группах: процедуры и методы сравнительного анализа. М.: Наука, 1991.

[6] Шоломов Л. А. Энтропийный подход к выработке коллективного решения// Анализ нечисловых данных в системных исследованиях. Вып. 10. - М.: ВНИИСИ, 1982. С. 84–93.

[7] Шоломов Л. А. Сжатие частично определенной информации// Нелинейная динамика и управление. Вып. 4. - М.: Физматлит, 2004. С. 377–396.

[8] Гейл Д. Теория линейных экономических моделей. - М.: ИЛ, 1963.

[9] Разумихин Б. С. Физические модели и методы теории равновесия в программировании и экономике. - М.: Наука, 1975.

[10] Питтель Б. Г. Одна простейшая вероятностная модель коллективного поведения// Проблемы передачи информации. 1967. Т. 3. Вып. 3. С. 37–52.

[11] Вильсон А. Дж. Энтропийные методы моделирования сложных систем. - М.: Наука, 1978.

[12] Popkov Y. S. Macrosystems Theory and its Applications. Equilibrium Models.// Lecture Notes in Control and Information Sciences. - London: Springer, 1995.

[13] Шоломов Л. А. Информационные свойства функционалов сложности для систем недоопределенных булевых функций// Проблемы кибернетики. Вып. 34. - М.: Наука, 1978. С. 133–150.